

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell' 11 aprile 1926.

V. VOLTERRA, *presidente*

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla quadratura delle superficie.* Nota del
CorrISP. LEONIDA TONELLI ⁽¹⁾.

Assumendo per definizione di area di una superficie quella proposta dal Lebesgue, e cioè il minimo limite delle aree delle superficie poliedriche tendenti alla superficie considerata, mi propongo di studiare le superficie continue ad area finita, cercando di sviluppare per esse una teoria analoga a quella, ormai ben conosciuta, delle curve continue rettificabili.

Comincio qui ad occuparmi delle superficie continue, date nella forma

$$(1) \quad z = f(x, y),$$

con $f(x, y)$ funzione continua, che, per semplicità, supporrò definita nel quadrato Q di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Analogamente a quanto ha fatto il Jordan per le curve, occorre di introdurre il concetto di funzione di due variabili *a variazione limitata*. A tale scopo, per ogni valore \bar{x} di $(0, 1)$, indicherò con $V_{(y)}(\bar{x})$ la variazione totale della funzione, della sola y , $f(\bar{x}, y)$, per y variabile in $(0, 1)$; e, dato a $V_{(x)}(y)$ analogo significato, dirò che la funzione $f(x, y)$ è *a variazione limitata in Q* se $V_{(y)}(x)$ e $V_{(x)}(y)$ sono finite in quasi tutto l'intervallo $(0, 1)$, e se, inoltre, esistono finiti entrambi gli integrali (di Lebesgue).

$$\int_0^1 V_{(y)}(x) dx \quad , \quad \int_0^1 V_{(x)}(y) dy \quad (2).$$

(1) Presentata nella seduta del 7 marzo 1926.

(2) Questa definizione può essere posta anche per le funzioni $f(x, y)$ discontinue.

Con questa definizione, dimostrerò che:

(A) condizione necessaria e sufficiente affinché la superficie (1) sia ad area finita, è che la funzione $f(x, y)$ sia a variazione limitata nel quadrato Q.

Ne risulterà così che la proprietà della $f(x, y)$ di essere a variazione limitata è del tutto indipendente dalla direzione degli assi nel piano (x, y) .

Per giungere alla proposizione indicata, ne dimostrerò un'altra, di per sé interessante. Indicata con $L_{(y)}(\bar{x})$ la lunghezza della sezione della superficie (1) col piano $x = \bar{x}$, e definito $L_{(x)}(\bar{y})$ in modo analogo, proverò che:

(B) condizione necessaria e sufficiente affinché la superficie (1) sia ad area finita è che le lunghezze $L_{(y)}(x)$ e $L_{(x)}(y)$ siano finite in quasi tutto $(0, 1)$ e siano, in tale intervallo, integrabili.

1. — Supponiamo che la superficie (1) sia ad area finita S e dimostriamo che $L_{(y)}(x)$ è finita quasi dappertutto in $(0, 1)$ e integrabile. Consideriamo, a tale scopo, una successione $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m, \dots$ di superficie poliedriche, tendenti alla (1) e tali che la successione delle loro aree, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$ tenda all'area S della (1). Dividiamo l'intervallo $(0, 1)$ dell'asse delle y in 2^n parti uguali, e, condotte per i punti di divisione le parallele all'asse delle x , costruiamo la superficie $\zeta = \zeta_n(x, y)$, ponendo $\zeta_n(x, y) = f(x, y)$ su tutte le parallele considerate (comprese le $y = 0$ e $y = 1$) e facendo variare la $\zeta_n(x, y)$, per ogni x fisso, linearmente rispetto ad y , fra i valori già ad essa assegnati. Indichiamo poi con $l_n(x)$ la lunghezza della sezione della superficie ζ_n col piano parallelo al piano (y, ζ) , condotto per il punto x dell'asse delle x (sezione che è un poligono di 2^n lati), e con $\lambda_m(x)$ la lunghezza della sezione corrispondente di Σ_m ⁽¹⁾. Poichè la superficie Σ_m tende, per $m \rightarrow \infty$, alla superficie (1), preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un \bar{m} tale che, per ogni $m > \bar{m}$ e per ogni x di $(0, 1)$, sia $\lambda_m(x) > l_n(x) - \varepsilon$, e pertanto (essendo $\lambda_m(x)$ e $l_n(x)$ funzioni continue)

$$\int_0^1 \lambda_m(x) dx \geq \int_0^1 l_n(x) dx - \varepsilon.$$

Ma è, evidentemente,

$$\int_0^1 \lambda_m(x) dx \leq \sigma_m,$$

e siccome, per $m \rightarrow \infty$, è $\sigma_m \rightarrow S$, le σ_m restano tutte inferiori ad un numero fisso M, e si ha così

$$\int_0^1 l_n(x) dx < M + \varepsilon,$$

disuguaglianza che vale qualunque sia n .

(1) È lecito supporre che le Σ_m non abbiano facce perpendicolari al piano (x, y) , perchè, in caso contrario, basterebbe modificare leggermente le Σ_m senza togliere alla successione di tali superficie poliedriche le proprietà ammesse più sopra.

Ora è $l_n(x) \leq l_{n+1}(x)$ e pertanto, in virtù di un noto teorema di integrazione per serie di B. Levi⁽¹⁾ e per un'osservazione dovuta a G. Vitali⁽²⁾, la successione di funzioni $l_1(x), l_2(x), \dots, l_n(x), \dots$ converge in quasi tutto $(0, 1)$ verso una funzione finita, e questa funzione limite è integrabile. Ma è, per $n \rightarrow \infty$, $l_n(x) \rightarrow L_{(y)}(x)$, e pertanto quanto ci eravamo proposti al principio di questo numero è dimostrato.

In modo analogo si dimostra la stessa proprietà per $L_{(x)}(y)$.

2. - Ammessa ora, tanto per la $L_{(y)}(x)$ quanto per la $L_{(x)}(y)$, la proprietà dimostrata nel numero precedente, proviamo che la superficie (1) è ad area finita.

Dividiamo l'intervallo $(0, 1)$ dell'asse delle x in n parti uguali, che indicheremo con $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Avremo

$$\int_0^1 L_{(y)}(x) dx = \sum_{r=1}^n \int_{\delta_r} L_{(y)}(x) dx.$$

La funzione $L_{(y)}(x)$ è semicontinua inferiormente in tutto $(0, 1)$, e perciò essa ha in ogni δ_r un minimo assoluto (finito perchè $L_{(y)}(x)$ è finita in quasi tutto δ_r). Indichiamo con x_r l'ascissa minima dei punti di minimo assoluto di $L_{(y)}(x)$ in δ_r (ascissa minima che esiste per la semicontinuità). Allora è

$$(2) \quad \int_0^1 L_{(y)}(x) dx \geq \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n L_{(y)}(x_r).$$

Procediamo in modo analogo sull'asse delle y , e indichiamo con y_r l'analogo di x_r . Osserviamo che è sempre $0 \leq x_{r+1} - x_r \leq 2:n$, $0 \leq y_{r+1} - y_r \leq 2:n$, per ogni r da 1 ad $n-1$.

Fatto ciò, conduciamo per i punti x_r le parallele all'asse delle y , e per gli y_r le parallele all'asse delle x . Veniamo così a dividere il quadrato Q in tanti rettangoli, dei quali considereremo soltanto quelli $R_{r,s} \equiv [x_r \leq x \leq x_{r+1}, y_s \leq y \leq y_{s+1}]$, ($r = 1, 2, \dots, n-1$; $s = 1, 2, \dots, n-1$). In corrispondenza di ciascun $R_{r,s}$ consideriamo i due triangoli aventi i vertici sulla superficie (1) nei punti che si proiettano ortogonalmente sul piano (x, y) in (x_r, y_s) , (x_{r+1}, y_s) , (x_{r+1}, y_{s+1}) , per il primo, e in (x_r, y_s) , (x_r, y_{s+1}) , (x_{r+1}, y_{s+1}) , per il secondo. L'insieme di tutti questi triangoli costituisce una superficie poliedrica Σ_n ; e questa Σ_n , per $n \rightarrow \infty$, converge alla superficie (1)⁽³⁾.

(1) *Sopra l'integrazione delle serie*, « Rend. Ist. Lombardo », s. II, vol. XXXIX (1906).

(2) *Sull'integrazione per serie*, « Rend. Circ. Matem. Palermo », t. XXIII (1907).

(3) Si osservi che la proiezione ortogonale di Σ_n sul piano (x, y) è data dal rettangolo $x_1 \leq x \leq x_n$, $y_1 \leq y \leq y_n$, e che è $0 \leq x_1 \leq 1:n$, $0 \leq 1 - x_n \leq 1:n$, $0 \leq y_1 \leq 1:n$, $0 \leq 1 - y_n \leq 1:n$; tale rettangolo tende perciò, per $n \rightarrow \infty$, al quadrato Q .

Indichiamo con $\lambda_n(x)$ la lunghezza della sezione di Σ_n col piano parallelo ad (y, z) condotto per il punto x dell'asse delle x . Per ogni x appartenente all'intervallo (x_r, x_{r+1}) , è $\lambda_n(x) < \lambda_n(x_r) + \lambda_n(x_{r+1})$, perchè i lati della sezione che si trovano sui triangoli che hanno le basi sul piano $x = x_r$, sono minori di tali basi, ed hanno perciò una somma $< \lambda_n(x_r)$, mentre gli altri hanno una somma $< \lambda_n(x_{r+1})$.

Ma la sezione relativa a $x = x_r$ è una poligonale inscritta nella sezione corrispondente della superficie (1); è quindi $\lambda_n(x_r) \leq L_{(y)}(x_r)$, e, in tutto (x_r, x_{r+1}) , si ha $\lambda_n(x) < L_{(y)}(x_r) + L_{(y)}(x_{r+1})$. Di qui segue

$$\int_{x_1}^{x_n} \lambda_n(x) dx < \sum_{r=1}^{n-1} (x_{r+1} - x_r) \left\{ L_{(y)}(x_r) + L_{(y)}(x_{r+1}) \right\},$$

e, per essere $x_{r+1} - x_r \leq 2 : n$,

$$\int_{x_1}^{x_n} \lambda_n(x) dx < \frac{4}{n} \sum_{r=1}^n L_{(y)}(x_r),$$

onde, per la (2),

$$\int_{x_1}^{x_n} \lambda_n(x) dx < 4 \int_0^1 L_{(y)}(x) dx.$$

Se ora osserviamo che la somma delle aree delle proiezioni ortogonali di tutte le facce di Σ_n sul piano (x, z) è $\leq \int_{x_1}^{x_n} \lambda_n(x) dx$, abbiamo che tale somma è $< 4 \int_0^1 L_{(y)}(x) dx$. Analogamente, la somma delle aree delle proiezioni ortogonali di tutte le facce di Σ_n sul piano (y, z) risulta $< 4 \int_0^1 L_{(x)}(y) dy$. E siccome la somma delle due somme ora considerate, aumentata dell'area $(x_n - x_1)(y_n - y_1) < 1$ del rettangolo del piano (x, y) su cui si proietta Σ_n , supera la somma delle aree di tutte le facce di Σ_n , vale a dire l'area σ_n di Σ_n , ne viene

$$\sigma_n < 1 + 4 \left\{ \int_0^1 L_{(y)}(x) dx + \int_0^1 L_{(x)}(y) dy \right\}.$$

Il minimo limite di σ_n , per $n \rightarrow \infty$, è dunque non superiore al secondo membro di questa disuguaglianza, e siccome le Σ_n tendono, per costruzione, alla superficie (1), resta dimostrato che l'area S di tale superficie è finita.

La proposizione (B) è così pienamente dimostrata.

3. - Per passare alla proposizione (A), osserviamo che, per ogni x di $(0, 1)$, è $V_{(y)}(x) \leq L_{(y)}(x)$, e che perciò, se la $L_{(y)}(x)$ è finita in

quasi-tutto $(0, 1)$, altrettanto accade della $V_{(y)}(x)$. Inoltre, se la $L_{(y)}(x)$ è integrabile in $(0, 1)$, tale risulta anche la $V_{(y)}(x)$, con

$$\int_0^1 V_{(y)}(x) dx \leq \int_0^1 L_{(y)}(x) dx.$$

Dunque, in virtù della posizione (B) , si ha che, se la superficie (I) è ad area finita, la $V_{(y)}(x)$ è finita in quasi-tutto $(0, 1)$ ed integrabile in questo intervallo⁽¹⁾. E siccome ciò vale anche per la $V_{(x)}(y)$, ne viene che, « se la superficie (I) è ad area finita, la funzione $f(x, y)$ è a variazione limitata nel quadrato Q ».

4. - Viceversa, se in un punto x di $(0, 1)$ la $V_{(y)}(x)$ è finita, è tale anche la $L_{(y)}(x)$, per il teorema di Jordan sulle curve rettificabili, ed è (per essere il quadrato Q di lato 1).

$$L_{(y)}(x) \leq 1 + V_{(y)}(x).$$

Ne segue che, se la $V_{(y)}(x)$ è integrabile in $(0, 1)$, tale è anche la $L_{(y)}(x)$, con

$$\int_0^1 L_{(y)}(x) dx \leq 1 + \int_0^1 V_{(y)}(x) dx.$$

Dunque, « se la funzione $f(x, y)$ è a variazione limitata nel quadrato Q , $L_{(y)}(x)$ e $L_{(x)}(y)$ sono in $(0, 1)$ quasi dappertutto finite e integrabili, e, per la proposizione (B) , la superficie (I) è ad area finita ». Con ciò la proposizione (A) risulta provata.

5. - È bene rilevare la seguente proprietà delle funzioni $f(x, y)$ a variazione limitata nel quadrato Q : scelta una qualsiasi direzione a , nel piano (x, y) , su quasi tutte le rette di questo piano aventi la direzione a , la variazione totale della $f(x, y)$, considerata come funzione del punto della retta, è finita. Inoltre, fissata un'altra retta di direzione ortogonale (o no) ad a , la variazione totale indicata, considerata come funzione dei punti di questa nuova retta, è integrabile. Altrettanto dicasi della lunghezza della sezione della superficie (I) con un piano perpendicolare al piano (x, y) ed avente una data giacitura. Tutto ciò segue immediatamente dalle proposizioni (A) e (B) , cambiando la direzione degli assi x e y , in modo da portare uno di essi ad avere la direzione scelta a .

6. - Da quanto si è dimostrato segue che: *condizione sufficiente affinché la $f(x, y)$ sia a variazione limitata nel quadrato Q , e quindi affinché*

(1) Questo risultato trovasi dimostrato, per altra via, nella Nota del dott. G. LAMPARELLO, *Sulle superficie continue che ammettono area finita*, inserita nel fascicolo precedente (p. 294).

la superficie (1) sia ad area finita, è che le funzioni $V_{(y)}(x)$ e $V_{(x)}(y)$ siano limitate, o ciò che è lo stesso, siano limitate le $L_{(y)}(x)$ e $L_{(x)}(y)$. In particolare, si ha che ogni funzione $f(x, y)$ a rapporti incrementali limitati (o, più restrittivamente, a derivate parziali prime limitate) è a variazione limitata nel quadrato Q .

Si ha anche: ogni funzione $f(x, y)$ monotona nel verso degli assi (cioè monotona per ogni y fisso e per x variabile, ed anche per ogni x fisso e y variabile) è a variazione limitata nel quadrato Q . Ed infatti, in tale caso $V_{(y)}(x)$ e $V_{(x)}(y)$ risultano limitate.

Si ha pure che ogni funzione $f(x, y)$ a variazione limitata, secondo la definizione di Arzelà⁽¹⁾, è anche a variazione limitata secondo la definizione qui posta. Ciò è conseguenza del fatto che, per una funzione soddisfacente alla definizione di Arzelà, le $V_{(y)}(x)$ e $V_{(x)}(y)$ sono limitate. Esistono però funzioni a variazione limitata nel nostro senso, ma non in quello di Arzelà.

È pure a variazione limitata secondo la nostra definizione ogni funzione $f(x, y)$ a variazione limitata secondo la definizione di Hardy⁽²⁾. Ed infatti, come ha dimostrato W. H. Young⁽³⁾, per le funzioni a variazione limitata secondo Hardy le $V_{(y)}(x)$ e $V_{(x)}(y)$ risultano limitate.

Se la $f(x, y)$ è a variazione limitata secondo la definizione del Vitali⁽⁴⁾, essa è o no a variazione limitata secondo la nostra definizione nello stesso tempo che è o no a variazione limitata secondo Hardy.

La funzione $f(x, y) \equiv \varphi(x)$, con $\varphi(x)$ non a variazione limitata nell'intervallo $(0, 1)$, è, nel quadrato Q , a variazione limitata secondo il Vitali, ma non secondo Hardy, e neppure secondo la nostra definizione. Viceversa, esistono funzioni a variazione limitata nel senso della definizione qui posta ma non in quello di Hardy o di Vitali. Di queste funzioni è esempio quella costruita dal Küstermann nei « Math. Annalen », vol. LXXVII, p. 474; tale funzione è a variazione limitata secondo Arzelà e quindi secondo la nostra definizione, ma non lo è nel senso di Hardy e quindi neppure in quello di Vitali (perchè essa è a variazione limitata come funzione della sola x e della sola y).

(1) « Rend. della R. Accad. delle Scienze di Bologna », vol. IX (1904-1905).

(2) « Quarterly Journal of Mathematics », vol. XXXVII (1905), p. 58.

(3) « Proc. London Mathematical Society » (2), vol. XI (1912), p. 142.

(4) Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, « Atti R. Accad. Scienze di Torino », vol. XLIII (1907-1908).

Meccanica. — *Possibilità di superaviazione.* Nota del Corrispondente G. A. CROCCO ⁽¹⁾.

In una precedente Nota abbiamo tracciato i principi fondamentali e le fondamentali difficoltà della superaviazione, cioè della locomozione ad altissime quote per mezzo dell'aeroplano quando si ponga costante il prodotto $\delta F(v)$ della *densità relativa* per la *funzione della velocità* al livello del mare. Abbiamo concluso che sarà forse possibile coi mezzi della ordinaria aviazione raggiungere le velocità subacustiche, ma che per quelle iperacustiche è necessario ricorrere a nuovi mezzi motopropulsivi che consentano di bruciare forti quantità di combustibile in tempi relativamente assai più brevi di quelli occorrenti negli usuali motori. Ed abbiamo anche accennato che questi nuovi mezzi sembra risiedano nei *propulsori a reazione*.

In questa Nota ci proponiamo di sviluppare il nostro concetto.

*
* *

Propulsore a reazione, nello stretto significato del termine, chiameremo un congegno capace di espellere con continuità o con regolare intermittenza e a forte velocità, una certa massa di materia fluida, preventivamente contenuta nel congegno, così da generare in senso opposto una spinta propulsiva ⁽²⁾.

Il più semplice propulsore a reazione è perciò il *razzo*, ove la materia lanciata è la polvere pirica, mescolata ad una sostanza inerte, e gradatamente gasseificata durante il tragitto. Il più complesso sinora ideato è l'ugello delle *turbine a gas* ove un combustibile ed un comburente sapientemente mescolati ad un'eventuale sostanza inerte, e preventivamente com-

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1926.

(2) Con largo significato ogni propulsore potrebbe chiamarsi a reazione: così l'elica nel fatto raccoglie dall'ambiente alla velocità di traslazione una certa massa d'aria immobile e le comunica una certa velocità assoluta in senso opposto al moto, generando una spinta che potrebbe appunto chiamarsi di reazione, e che trova materiale appoggio sulle pale, come abbiamo a suo tempo svolto nella nostra Teoria analitica delle eliche. Viceversa il propulsore a reazione potrebbe chiamarsi ad azione ove si pensasse che la spinta può intendersi dovuta alla pressione statica del fluido contro il fondo posteriore del recipiente che lo contiene e per quella porzione di parete ove la pressione stessa non trova compenso nella parete anteriore, opportunamente forata, da cui sfugge il getto fluido.

Per ben precisare abbiamo perciò chiamato *propulsore a reazione* quel propulsore ove la massa fluida, spinta nel senso opposto del moto, non viene presa dall'ambiente esterno lungo il cammino, ma trovasi tutta preventivamente alloggiata nel mobile.

pressi si combinano gradatamente o intermittenemente ed espellono con grande velocità i prodotti della loro combustione insieme con la sostanza inerte.

Le velocità di egresso dei getti così generati, nell'un caso o nell'altro, raggiungono agevolmente i *duemila* metri al secondo, e le superano alle alte quote, ove la rarefazione esterna favorisce l'espansione.

Senza entrare tuttavia nel merito della realizzazione di simili congegni, ossia nella loro *balistica interna*, che esorbiterebbe gravemente dal quadro della presente Nota, noi qui tratteremo sommariamente i capisaldi della loro eventuale applicazione all'aeroplano, cioè della loro *balistica esterna*.

*
* *

Sia pertanto m la massa $\frac{p}{g}$ di materia uscente nell'unità di tempo con velocità costante — V , in senso opposto al moto, da un mobile che al tempo t abbia la massa M e la velocità v . Se R è la risultante delle forze esterne, contrarie al moto, la *quantità di moto* posseduta dal mobile al tempo t , cioè Mv , assume al tempo $t + dt$ il valore $(M - mdt)(v + dv)$, mentre la quantità di moto comunicata alla massa proiettata è $mdt(v - V)$

Eguagliando alla quantità di moto primitiva la somma di queste quantità di moto più l'impulso delle forze esterne, si ha

$$(M - mdt)(v + dv) + mdt(v - V) + R dt = Mv$$

dalla quale semplificando risulta:

$$(6) \quad mV dt = Mdv + R dt$$

e, dividendo per dt ,

$$mV = M \frac{dv}{dt} + R.$$

Si genera cioè nel mobile una *forza propulsiva* $f = mV$ che fa contrasto alla risultante delle forze esterne contrarie al moto ed a quella di massa.

La forza propulsiva così calcolata dipende unicamente dalla portata del getto e dalla sua velocità di proiezione: ed è indipendente dalla velocità del mobile e dalle condizioni del fluido esterno.

La spinta esercitata dal propulsore a reazione rimane pertanto costante a qualunque altezza, anche nel vuoto, ed a qualunque velocità di avanzamento. Esso costituisce perciò in principio il propulsore ideale per l'alta quota.

Per contro esso richiede la provvista non solo del combustibile ma anche del comburente e della materia inerte di raffreddamento: ossia un peso notevolmente maggiore e perciò non può venire adoperato se non nelle circostanze che passiamo a precisare.

*
**

Noteremo intanto che il propulsore a reazione consente di raggiungere una velocità di avanzamento del mobile anche maggiore della velocità di egresso della miscela reagente.

Dalla (6) infatti, osservando che alla massa mdt , proiettata nel tempo dt , corrisponde una diminuzione di massa del mobile $-dM$, ricavasi:

$$-\frac{dM}{M} \left(1 - \frac{R}{mV} \right) = \frac{dv}{V}$$

che si può integrare, per R costante, tra 0 e v_1 e tra M_0 e M_1 , ottenendo:

$$(7) \quad \left(1 - \frac{R}{mV} \right) \log \frac{M_0}{M_1} = \frac{v_1}{V};$$

la quale dimostra, quando sia naturalmente $mV > R$, la possibilità di un valore del rapporto $\frac{M_0}{M_1}$ per cui risulti $v > V$.

Questo apparente paradosso trova la sua spiegazione nel fatto che la massa finale, M_1 , che riceve la maggior velocità v , è in tal caso più piccola della massa proiettata $M_0 - M_1$ che riceve la velocità $-V$, e si comporta perciò come il proiettile in confronto del cannone.

*
**

Un'altra considerazione ci fornirà l'esame del volo orizzontale a velocità uniforme. Quando il mobile abbia già acquisito la velocità di volo, v_1 , e prosegua in quota, potremo porre $dv = 0$ e sostituire ad R l'espressione della resistenza del velivolo $R = X \cdot S \cdot F(v)$. Ricordando poi che il peso del velivolo è dato da $P = Y \delta F(v)$ e che abbiamo posto $\epsilon = \frac{X}{Y}$, per cui si ha $R = \epsilon P = \epsilon M g$, la (6) ci fornirà:

$$mV dt = \epsilon M g dt;$$

da cui, ricordando che è $-mdt = dM$; $v_1 dt = dS$, ed assumendo per ϵ un valor medio, costante, si ricava lo spazio percorso:

$$(8) \quad S = \frac{v_1 V}{\epsilon g} \log \frac{M_0}{M_1}.$$

Questa espressione di S è per altro la (5) ossia l'integrale della formula generica (4) della precedente Nota⁽¹⁾, ove abbiamo sostituito la massa M al peso P ed ove il consumo specifico c , che avevamo assunto costante nel caso dei motori ordinari, ha per il caso attuale una diversa espressione. Poichè nel fatto c è riferito alla potenza utile π che nel caso attuale è $m V u_r$, e poichè il consumo complessivo nell'unità di tempo è ora $p = mg$ dove m ha il significato innanzi definito, avremo $c = \frac{g}{u_r V}$; e la (8) si riduce esattamente alla (5) cioè all'integrale della (4) per ε costante.

La seconda proposizione da noi dedotta nella precedente Nota per la propulsione a motore-elica, si modifica pertanto nel modo seguente.

A parità di peso e per propulsione a reazione, il combustibile necessario a percorrere una determinata distanza in volo orizzontale ed uniforme, è in ragione inversa del prodotto della velocità di volo per la velocità di egresso del getto propulsivo.

Ciò dimostra la convenienza di grandi velocità di avanzamento; e dimostra altresì la ragione dell'insuccesso del propulsore a reazione per le velocità dell'ordinaria aviazione.

*
**

Le conclusioni ricavabili dalla (8) riguardano però soltanto il volo a velocità uniforme, e ad altezza costante senza tener conto del lavoro necessario a raggiungere l'altezza e la velocità prestabilita. È tempo pertanto di affrontare il problema da questo punto di vista.

Sia perciò il mobile in un punto della sua traiettoria curvilinea ove abbia massa M , velocità v , quota h , forza propellente $f = m V$, pendenza α , forza resistente $(\varepsilon \cos \alpha + \sin \alpha) Mg$. Sia s il percorso in traiettoria al tempo t ; S il percorso orizzontale.

Avremo dunque, per l'eguaglianza dei lavori, essendo $ds \sin \alpha = dh$; $ds \cos \alpha = dS$:

$$(9) \quad \frac{m V}{M} ds = v dv + g dh + g \varepsilon dS;$$

e per l'eguaglianza delle quantità di moto:

$$(10) \quad -V \frac{dM}{M} = dv + g \frac{dh}{v} + g \varepsilon \cos \alpha dt;$$

nelle quali si potrà porre $\cos \alpha \cong 1$, quando la traiettoria sia molto tesa.

(1) Nel calcolo numerico della precedente Nota è stato adottato per c il valore $1.54 \cdot 10^{-6}$ e per ε il valore $1:7$.

In entrambe queste equazioni, dovendo sempre rispettarsi la condizione $2F(\psi) = \text{costante}$, è precisata la relazione tra v ed h e quindi tra dv e dh .

La (10) è intanto integrabile, posto $\cos \alpha \approx 1$, per tutta la traiettoria, giacché i valori iniziali e finali della velocità e della quota coincidono. Sono perciò nulli gli integrali, tra i limiti, del primo e del secondo termine del secondo membro, e si ha

$$(11) \quad V \log \frac{M_0}{M_1} = g \epsilon t.$$

Per integrare analogamente la (9) occorre un'ipotesi sulla forza propulsiva, ossia su m . Potremo che sia costante il rapporto $\frac{m}{M} = \mu$; ed avremo, osservando che sono nulli fra i limiti i due integrali intermedi, e che l'integrale del primo membro si limita all'azione propulsiva *in salita*:

$$(12) \quad \mu V s_x = g \epsilon S.$$

essendo s_x lo spazio percorso in traiettoria ascendente.

Per aver posto, d'altronde, $\mu = \frac{m}{M}$ si ricava:

$$\mu dt = \frac{m dt}{M} = - \frac{dM}{M}$$

e quindi, integrando per la durata t_x della salita,

$$\mu t_x = \log \frac{M_0}{M_1}.$$

Si deduce subito, sostituendo questo valore nella (11) e dividendo la (12) per la (11):

$$\frac{s_x}{t_x} = \frac{S}{t} = v_m;$$

e cioè che la velocità media lungo la traiettoria in salita eguaglia la velocità media di tutto il percorso orizzontale.

Moltiplicando la (11) per v_m troveremo intanto, poichè $t v_m = S$:

$$(13) \quad S = \frac{V v_m}{g \epsilon} \log \frac{M_0}{M_1}$$

espressione analoga alla (8) ottenuta per volo orizzontale, nella quale figura la velocità media v_m al posto della v_x .

Quest'espressione può ora ottenersi anche dalla (12) sostituendo a s_x il suo valore $t v_m$, e le altre relazioni ottenute.

Rimane a determinare questo valor medio v_m .

*
* *

Osserveremo perciò che se si suppone che la traiettoria in salita sia anch'essa tale che si possa confondere s_1 con la sua proiezione orizzontale S_1 , la velocità media cercata coincide con la velocità media del percorso orizzontale durante la discesa.

Ricaveremo perciò tale valore dallo sviluppo e dalla durata della traiettoria discendente ⁽¹⁾.

Facendo infatti nella (9) $m = 0$ e $\cos \alpha \cong 1$ si ricava, detta v_1 la velocità massima e H_1 la corrispondente altezza:

$$g \varepsilon S_2 = \frac{v_1^2}{2} + g H_1$$

Per ottenere l'integrale analogo della (10) occorrerà conoscere quello di $g \frac{dh}{v}$, ove i dh corrispondano ai dv secondo la già indicata relazione. Eseguendo i calcoli per piccoli incrementi finiti di v , si trovano i valori seguenti:

QUADRO II.

v_1	$g \varepsilon t_2$	$g \varepsilon S_2$	v_m	$\frac{v_m}{v_1}$
100	—	—	—	—
200	898	126.500	141	0.705
300	1301	243.000	187	0.624
400	1560	337.000	216	0.540
500	1747	424.000	243	0.486
600	1895	504.000	266	0.444
700	2021	587.000	290	0.415
800	2138	676.000	317	0.394
900	2250	772.000	343	0.381
1000	2358	874.000	371	0.371

i quali precisano le quantità v_m da inserire nella formula (13).

(1) Si è assunta la velocità di 100 m/sec a livello del mare per definire una relazione tra velocità e altitudine; ma per maggiore generalità le interpretazioni e i calcoli sono compiuti tra v_1 e zero.

*
**

Per concretare tale formula è ora necessario precisare la natura della traiettoria in salita. In teoria questa può immaginarsi anche verticale, ma a prescindere dal merito teorico, è evidente che in pratica si salga per traiettorie non eccessivamente ripide. È perciò che abbiamo supposto di poter confondere il percorso in traiettoria col percorso orizzontale. Ora per passare ad un esempio numerico, e unicamente a questo fine, supporremo che il percorso orizzontale, corrispondente alla salita, sia in un determinato rapporto con la quota massima raggiunta; per esempio *quattro* volte. Ponendo $\varepsilon = 0.1$ e quindi $g\varepsilon \cong 1$, e $V = 2000$ m./sec. ne risulteranno le cifre del quadro seguente:

QUADRO III.

v_i	H_i Chilometri	S	$\frac{M_o}{M_i}$	$\frac{M_o - M_i}{M_o}$ %	$\frac{P_o - P_i}{P_i S}$ Kg. / Tonn. / Kil.
100	0	0	0	—	—
200	11.65	173	1.84	45.6	4.85
300	19.8	322	2.35	57.5	4.30
400	25.7	440	2.76	63.7	3.95
500	29.9	544	3.05	67.2	3.75
600	32.4	634	3.27	69.4	3.58
700	34.2	729	3.47	71.2	3.35
800	35.6	819	3.61	72.3	3.20
900	36.6	918	3.80	73.7	3.05
1000	37.5	1024	3.96	74.8	2.90

Da questi quadri si rileva che, sotto le ipotesi e condizioni indicate:

1° I percorsi totali (quadro III) sono all'incirca proporzionali alle velocità massime prestabilite. Questi percorsi risultano dalla somma dei percorsi in discesa, indipendenti dalla velocità di egresso della miscela, e di quelli in salita, multipli per ipotesi delle altezze massime, connesse con le velocità massime e indipendenti anch'essi dalle velocità della miscela;

2° I rapporti tra le velocità medie e le velocità massime (quadro II) diminuiscono col crescere delle velocità massime. Anch'essi, per l'eguaglianza tra le velocità medie totali e quelle parziali, sono indipendenti dalle velocità di egresso della miscela;

3° Che le percentuali delle provviste occorrenti, risultando tanto minori quanto maggiori sono le velocità di egresso della miscela, alle quali nel caso esemplificato è stato assegnato un valor massimo, costante, figurano nel quadro III coi loro minimi valori. Questi valori risultano elevati sin dalle prime cifre;

4° Il consumo specifico di miscela per tonnellata-chilometro (quadro III) decresce col crescere della velocità, ma in ragione minore di quella indicata per volo orizzontale a causa della diminuzione del rapporto fra velocità medie e velocità massime.

*
* *

Ci riserviamo di indicare in ulteriori comunicazioni che cosa praticamente possa sperarsi da queste cifre.

Per ora osserviamo che, malgrado il forte consumo di miscela, esse tuttavia lasciano prevedere che la superaviazione con motore a reazione è problema realizzabile: e potrà schiudere all'uomo un nuovo campo di grandiosa attività sia dal punto di vista pacifico che da quello bellico. Varcare ad esempio la distanza tra Roma e Parigi in *quarantacinque* minuti costituisce meta affascinante ai più rosei sogni aviatori.

Certo sono roseti pieni di spine: ma giova dire col poeta: *Rosam cape, spinam cave.*

Meccanica. — *Un paradosso del propulsore a reazione.* Nota del Corrisp. CROCCO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulle frange di Perot e Fabry prodotte con una lamina birifrangente semiargentata.* Nota del Socio CORBINO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

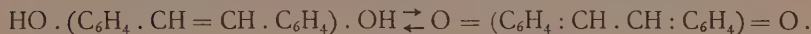
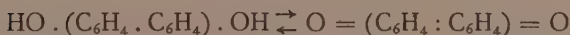
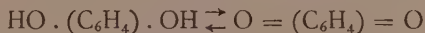
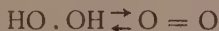
Fisica. — *Risposta ad una critica.* Nota del Socio CANTONE.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Una pretesa priorità a proposito della conducibilità delle catene non sature.* Nota del Socio A. ANGELI ⁽¹⁾.

In un lavoro comparso recentemente, febbraio 1926, il prof. Ludwig Claisen ⁽²⁾ espone, tentando di farle passare per nuove e come sue, alcune considerazioni di indole generale che sono identiche a quelle che io ho pubblicate in questi « Rendiconti » dal 1917 al 1924 ⁽³⁾.

Come è noto, negli scorsi anni, giovandomi di dati sperimentali dovuti in gran parte ad altri autori, io ho posto in rilievo che due sostituenti A e B, posti nelle posizioni orto ovvero para di un anello aromatico, ovvero anche in due anelli aromatici diversi direttamente uniti fra di loro, oppure separati da catene non sature caratteristiche *si comportano come se fossero congiunti direttamente fra di loro*; in tale occasione ho riportato un grande numero di esempi e qui mi limiterò a ricordare uno dei più caratteristici, che si riferisce al caso di due ossidrili:



Questa proprietà viene a mancare quando i due residui aromatici sono congiunti da un residuo saturo, p. es. il metilene:

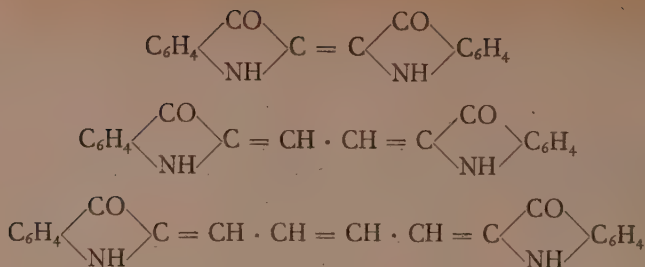


Questo per quanto riguarda il comportamento chimico; per quanto si riferisce alle proprietà fisiche ricorderò che l'indaco, il tioindaco ed alcuni loro derivati, che contengono gli stessi anelli separati da doppi legami, come p. es.:

(1) Presentata nella seduta del 7 marzo 1926.

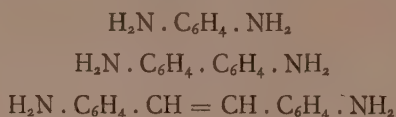
(2) « Berliner Berichte », 59 (1926), p. 152.

(3) Una Memoria riassuntiva è stata pubblicata nelle « Memorie Lincei » 14, fascicolo 12 (1924) p. 1, e la traduzione tedesca è comparsa nello stesso anno nella *Sammlung* del prof. AHRENS (Stuttgart).



possiedono gli stessi caratteri.

Nello stesso modo si rassomigliano i colori che derivano dalla p. fenilendiammina, benzidina e p. diamminostilbene ⁽¹⁾:



ma invece non più quelli che si ottengono dal p. diamminodifeniletano:



nel quale i due residui aromatici sono riuniti dalla catena satura:



Ho pure detto che molto probabilmente è da intendersi nello stesso modo anche il fatto interessante posto in rilievo da I. Thiele, che cioè i sistemi contenenti doppi legami coniugati:



possono aggiungere idrogeno ovvero alogeno ai due atomi di carbonio estremi; in tal modo questi atomi di carbonio estremi appariscono come congiunti direttamente fra di loro:



Per spiegare questo assieme di fatti d'indole molto generale, io ho detto chiaramente che *alcuni sistemi di catene di atomi di carbonio si comportano come se possedessero una forma di conducibilità* ⁽²⁾ ed ho aggiunto altresì che *i residui saturi interposti agiscono come isolatori*.

(1) Capostipite di questa serie sarebbe l'idrazina $\text{H}_2\text{N} \cdot \text{NH}_2$, da cui deriva la catena $-\text{N} = \text{N} -$ contenuta negli azocomposti.

(2) Che io mi fossi spiegato bene lo dimostra la breve rettifica pubblicata da KLEUCKER, «Berichte», 55 (1922) p. 2941.

Posti così bene in chiaro questi dati e queste considerazioni da me pubblicate negli scorsi anni, riassumerò brevemente le considerazioni contenute nell'antico lavoro di Claisen, al quale egli oggi si richiama, giovandomi delle sue stesse parole.

Questo chimico aveva posto in rilievo negli anni 1894⁽¹⁾ e 1896⁽²⁾ che i composti ossimetilenici:



possiedono le proprietà di acidi relativamente forti e perciò forniscono sali, con gli alcool danno eteri:



e con ammoniacca danno prodotti:



che hanno il carattere delle ammidi.

Per spiegare questo carattere dell'aggruppamento:



nella nota a piedi pagina del citato lavoro dell'anno 1896 (p. 35), a cui egli ora si richiama in modo particolare, il Claisen ricorre a considerazioni steriche ed ammette che l'ossidrile assuma *una posizione più vicina al carbonile*, come le seguenti formole chiariscono:

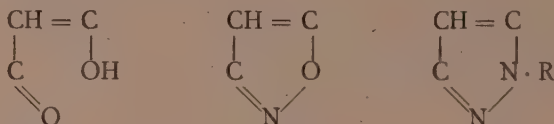


Aggiunge che si può anche ammettere che l'influenza acidificante che nel gruppo $-CO.OH$ il carbonile esercita sopra l'ossidrile *direttamente a lui riunito* sia analoga, e solamente più indebolita, quando il CO è molto prossimo al (OH). Nei di- e trichetoni, nei composti ossimetilenici, ecc., sarebbe presente *una forma di gruppo carbossilico formato da CO fortemente avvicinato al (OH)*, mentre negli ordinari acidi carbossilici questi due gruppi sono direttamente uniti fra di loro.

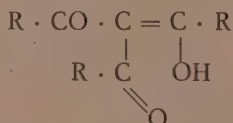
(1) « Annalen », 281 (1894), 306.

(2) « Ibid. », 291 (1896), 25.

In appoggio di questo modo di vedere egli rammenta anche la facilità con la quale i composti della detta forma si trasformano in anelli pentatomici (isosazoli e pirazoli):



Aggiunge inoltre che se i trichetoni si considerano come:



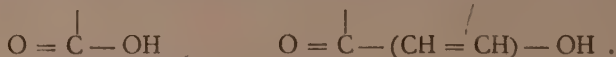
si potrebbe anche ammettere che assieme a questa configurazione (l'acida) ne possa esistere una seconda, nella quale l'ossigeno carbonilico non è rivolto verso l'ossidrilico, ma bensì nel senso opposto:



e questa seconda corrisponderebbe ai β -composti neutri.

La coesistenza delle due forme potrebbe in tal modo spiegare che la necessaria rotazione delle catene laterali, per la trasformazione di una forma nell'altra, viene in qualche modo impedita ovvero ostacolata.

Questa è la traduzione fedele della Nota di 30 anni or sono, sopra la quale l'autore cerca di fondare la sua priorità, ma che invece non contiene il minimo accenno all'azione precipua esercitata dal doppio legame, situato fra carbonile ed ossidrilico, e che impartisce ai composti ossimetilenici il carattere acido del gruppo carbossilico, come nell'attuale lavoro pone in rilievo:



Trovo altrettanto strano che il Claisen ora aggiunga pure che « la necessità del doppio legame per la realizzazione dell'accennato effetto si manifesta col fatto che appena il doppio legame viene saturato, il carattere acido scompare del tutto. Il doppio legame, egli prosegue nella pubblicazione

di quest'anno, costituisce in certo modo il conduttore attraverso il quale l'azione del CO si propaga ad (OH). Che i sistemi della forma:



sotto molti riguardi si comportino come se i resti A e B fossero direttamente riuniti fra di loro è stato dimostrato ancora più spesso in seguito, dapprima (1900) da Lapworth⁽¹⁾ ed in questo ultimo tempo specialmente da Angeli ».

Come si vede il Claisen, fa il tentativo non solo di far passare come sue le considerazioni che io ho pubblicate prima di lui, e che egli mostra di conoscere citando i miei lavori sull'argomento, sia pure attraverso i riassunti del « Chem. Zentralblatt », ma vorrebbe ora fare apparire che io non avessi fatto altro che estendere le sue vedute generali ad alcuni casi particolari.

Dai dati che ho riferiti risulta invece provato che egli, prima di me, non aveva mai pensato all'*azione specifica esercitata dai doppi legami*; che non aveva mai accennato alla *forma di conducibilità dei doppi legami*, che io ho espressa in modo così chiaro; che prima egli non si era mai accorto dell'*azione isolatrice esercitata dalle catene sature*; perciò, invece di farmi apparire come se io non avessi fatto altro che estendere le sue esperienze e giovarmi delle sue considerazioni, il Claisen, forse senza volerlo e senza bene saperlo, non ha fatto altro che ripetere cose che io aveva già detto ed aggiungere nuovi esempi che confermano una volta di più la regola che io aveva formulato alcuni anni prima; lieto d'altra parte che il Claisen riconosca oggi che la mia interpretazione, meglio di ogni altra, spieghi il comportamento dei chetoenoli da lui studiati 30 anni or sono.

Geologia. — *La Galleria del Drink (Valle d'Aosta).* Nota del Socio SACCO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *La continuità di alcune zone dell'Eocene dalle Alpi Marittime all'Appennino ligure e l'età delle argille scogliose.* Memoria del Corrisp. FRANCHI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Biologia. — *Mancanza di periodo agamo, sviluppo individuale e natura scinziale in Cryptochilum Echini Maupas.* Nota del Corrisp. RUSSO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Chemical Society Proceedings » 16 (1900), pp. 108, 132.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su di una presunta proprietà dei determinanti simmetrici del 6° ordine.* Nota di ANTONIO COLUCCI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio ERNESTO PASCAL.

Da una recente Nota di B. Segre, pubblicata nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » ⁽²⁾, ho appreso che il sig. H. W. Richmond, in un suo scritto che risale all'anno 1908, guidato da considerazioni geometriche pervenne al risultato che un determinante del 6° ordine avente eguali a zero tutti gli elementi principali ed i minori complementari di cinque di questi, ha nullo anche il sesto minore principale.

Il sig. Segre, dal canto suo, afferma che un'analoga proprietà vale per i determinanti simmetrici di ordine $n = 4$, mentre essa non sussiste per $n = 3$, $n = 5$ e per $n > 6$, salvo forse il caso di $n = 8$.

Nell'intento di vedere che cosa avviene nel caso dubbio affacciandosi al precedente Autore, sono stato condotto ad esaminare la questione dai primi valori di n , ed ho trovato, con mia grande meraviglia, che è fondamentalmente inesatto quanto egli ed il sig. Richmond asseriscono al riguardo dei determinanti simmetrici di 4° e 6° ordine. A provare ciò basta addurre i seguenti semplici esempi.

Indicando con a, b, c, x quattro numeri diversi da zero, il determinante simmetrico del 4° ordine

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & c & b \\ 0 & c & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 x^2,$$

ha nulli tutti i minori principali del 3° ordine, salvo il primo che vale $2abc$ ⁽³⁾. Questo semplicissimo risultato ci guida ora, in modo molto na-

(1) Nella seduta del 7. marzo 1926.

(2) B. SEGRE, *Intorno ad una proprietà dei determinanti simmetrici del 6° ordine*, « Rendiconti », vol. II (2° sem.), 1925, p. 539.

(3) Ciò corrisponde, evidentemente, al fatto che una quadrica non degenera circonscritta ad un tetraedro e tangente a tre facce di questo, non tocca, in generale, la quarta faccia.

turale, alla considerazione dei seguenti determinanti simmetrici di 6° ed 8° ordine rispettivamente

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & c & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 x^2,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & c & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^2 x^2,$$

i quali soddisfano alle accennate condizioni, ma presentano un minore principale ($A_{11} = \mp 2abc$) diverso da zero.

Con ciò il nostro asserto resta provato, e viene anche in luce che la proprietà in discorso non vale nemmeno per i determinanti di 8° ordine.

Pertanto siamo ora in grado di aggiungere che, escluso il caso banale di $n = 2$, essa non vale mai⁽¹⁾.

(1) La cosa per gli altri ordini si verifica agevolmente combinando particolari determinanti numerici di ordine più basso, come del resto ha fatto il sig. B. Segre nella citata Nota.

Matematica. — *Determinazione dei gruppi a un parametro di funzionali lineari.* Nota di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio LEVI-CIVITA.

1. Come per gli spazi a un numero finito di dimensioni si presenta di notevole importanza lo studio dei gruppi di trasformazioni puntuali del Lie, specialmente per le applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali, così anche nel campo funzionale sembra utile lo studio dei gruppi di operazioni funzionali che a ogni funzione $y(\alpha)$ fanno corrispondere un'altra funzione $f(t)$.

Esempi di tali gruppi si hanno nelle operazioni o funzionali lineari permutabili colla derivazione (gruppo particolarmente studiato dal prof. Pincherle ⁽²⁾) e, più generalmente, in tutta una classe di gruppi di funzionali lineari che è stata studiata dal prof. Levi-Civita ⁽³⁾ in vari suoi lavori. Mentre però tutti questi gruppi possono dirsi infiniti nel senso di Lie, poichè i loro elementi dipendono da infiniti parametri arbitrari (o da funzioni arbitrarie), io mi propongo ora lo studio generale dei gruppi a un parametro di funzionali lineari, gruppi che spero possano essere utili anche in questioni di matematica applicata.

2. Consideriamo dunque un insieme di funzionali lineari analitici, cioè delle operazioni funzionali F che a ogni funzione analitica $y(\alpha)$ di un certo campo funzionale, fanno corrispondere un'altra funzione analitica

$$f(t) = F[y(\alpha); t]$$

in modo però che sia

$$F[y_1(\alpha) + y_2(\alpha); t] = F[y_1(\alpha); t] + F[y_2(\alpha); t]$$

e che se y è funzione analitica, oltre che di α , anche di certi parametri λ, μ, \dots la funzione $f(t, \lambda, \mu, \dots) = F_\alpha[y(\alpha, \lambda, \mu, \dots); t]$ che si ottiene applicando il funzionale F alla y , considerata come funzione della sola α , sia analitica anche rispetto a questi parametri. È noto ⁽⁴⁾ che l'espressione più generale di questi funzionali lineari è data da

$$(1) \quad F[y(\alpha); t] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t, \alpha) y(\alpha) d\alpha$$

(1) Nella seduta del 21 marzo 1926.

(2) PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive*, Bologna, Zanichelli, 1901.

(3) T. LEVI-CIVITA, *Sui gruppi di operazioni funzionali*, «Rend. Ist. Lombardo», serie 2^a, vol. XXVIII, 1895 (tre Note).

(4) L. FANTAPPIÈ, *Le funzionali lineari analitiche e le loro singolarità*, «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. I, serie 6^a, 1^o sem., 1925.

dove la funzione analitica $v(t, \alpha)$ (indicatrice o caratteristica) è definita da

$$v(t, \alpha) = F_{\alpha} \left[\frac{1}{t - \alpha}; t \right]$$

e C è una curva chiusa del piano complesso α che racchiude nel suo interno tutti i punti singolari di y , ma lascia all'esterno tutti quelli di v (curva separatrice).

Supposto che alla funzione $f(t) = F[y(\alpha); t]$ sia applicabile un altro funzionale G dell'insieme considerato

$$g(\alpha) = G_t[f(t); \alpha] = G_t[F_{\alpha}[y(\alpha); t]; \alpha]$$

potremo chiamare *prodotto* GF dei due funzionali F e G il nuovo funzionale H , anch'esso lineare, risultante dall'applicazione successiva di F e G , e se indichiamo con $w(\alpha, \alpha)$ la sua indicatrice

$$\left(\text{cioè } w(\alpha, \alpha) = H_{\alpha} \left[\frac{1}{t - \alpha}; \alpha \right] \right)$$

e con $v(t, \alpha)$, $u(\alpha, t)$ le indicatrici di F e G rispettivamente, avremo per la formula fondamentale (1)

$$(2) \quad w(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} u(\alpha, t) v(t, \alpha) dt$$

essendo C' una curva chiusa del piano complesso t (una separatrice) racchiudente nel suo interno i punti singolari di v , ma non quelli di u ; o anche più brevemente

$$(3) \quad w(\alpha, \alpha) = u(\alpha, t) v(t, \alpha).$$

Cioè l'indicatrice w del funzionale prodotto $H = GF$ sarà il *prodotto funzionale* ⁽¹⁾ rispetto alla variabile comune t delle due indicatrici u e v dei funzionali componenti.

3. Seguendo le abituali definizioni (cfr. p. es. i lavori già citati dal prof. Levi-Civita) diremo poi che un insieme di funzionali lineari forma un *gruppo* tutte le volte che il prodotto di due qualsiasi di essi appartiene ancora all'insieme stesso. Condizione necessaria e sufficiente per questo sarà dunque, per la (3), che il prodotto funzionale di due qualsiasi indicatrici u e v , prese dall'insieme di tutte le indicatrici, appartenga ancora a questo insieme.

(1) L. FANTAPPIÈ, *La derivazione delle funzionali analitiche*, «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. I, serie 6^a, 1° sem., 1925.

Proponiamoci ora di costruire tutti i gruppi continui a un parametro di funzionali lineari, cioè tutti quei gruppi, contenenti l'identità, in cui basta far variare un solo parametro complesso μ per ottenerne tutti gli elementi; per le indicatrici $u(\mu; \zeta, \alpha)$ dovrà perciò esser soddisfatta la condizione

$$(4) \quad u(\mu_1; \zeta, t) u(\mu_2; t, \alpha) = u(\mu_3; \zeta, \alpha)$$

essendo $\mu_3 = \varphi(\mu_1, \mu_2)$ un conveniente valore del parametro. Cambiando opportunamente il parametro $\mu = \mu(\lambda)$ in un altro λ , potremo sempre far sì (come nei gruppi continui di Lie) che con questo nuovo parametro la legge di composizione funzionale di due indicatrici qualsiasi

$$v(\lambda_1; \zeta, t) = u(\mu(\lambda_1); \zeta, t) \quad \text{e} \quad v(\lambda_2; t, \alpha)$$

sia espressa da

$$(5) \quad v(\lambda_1; \zeta, t) v(\lambda_2; t, \alpha) = v(\lambda_1 + \lambda_2; \zeta, \alpha)$$

equazione a cui dunque si può ridurre la condizione (4) perchè l'insieme dei funzionali considerati sia un gruppo.

4. Adottando una locuzione adoperata dal prof. Volterra⁽¹⁾ nella sua teoria della composizione potremo anche dire che la $v(\lambda; \zeta, \alpha)$ deve possedere un *teorema di addizione integrale* rispetto al parametro λ (che ricorda quello della funzione esponenziale $e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2}$) espresso dall'equazione (5). Dimosteremo ora che, posto

$$h^0(\zeta, \alpha) = \frac{1}{\zeta - \alpha}, \quad h^1(\zeta, \alpha) = h(\zeta, \alpha)$$

$$(6) \quad h^2(\zeta, \alpha) = h(\zeta, t) h(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C h(\zeta, t) h(t, \alpha) dt$$

$$h^n(\zeta, \alpha) = h^{n-1}(\zeta, t) h(t, \alpha)$$

e supposto che esistano tutti questi prodotti funzionali $h^n(\zeta, \alpha)$ (che potremo chiamare nuclei iterati di h , o, col prof. Volterra, *potenze di composizione di h*) per n intero positivo qualsiasi e sia convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} h^n(\zeta, \alpha)$, l'espressione più generale delle indicatrici $v(\lambda; \zeta, \alpha)$ di un qualsiasi gruppo a un parametro di funzionali lineari è data appunto da

$$(7) \quad v(\lambda; \zeta, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} h^n(\zeta, \alpha)$$

(1) V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Leçons sur la composition et les fonctions permutables* Paris, Gauthier-Villars, 1924.

e da tutti gli eventuali prolungamenti analitici di questa serie di potenze di λ .

Osservando infatti che il prodotto funzionale gode della proprietà associativa, e quindi valgono per le potenze di composizione le stesse proprietà che per le potenze ordinarie, in particolare

$$(8) \quad h^r(\lambda, t) h^s(t, \alpha) = h^{r+s}(\lambda, \alpha)$$

risulta evidente che per la funzione $v(\lambda; \lambda, \alpha)$ definita dalla (7) varrà la relazione (5) (facendo il prodotto funzionale delle due serie che danno $v(\lambda_1; \lambda, t)$ e $v(\lambda_2; t, \alpha)$ basterà infatti raccogliere insieme i termini del medesimo grado in λ_1 e λ_2 , tenendo conto di (8), per avere i successivi termini della serie che rappresenta il secondo membro). Lo sviluppo (7) ci definisce quindi effettivamente, quando converge, tutte le indicatrici $v(\lambda; \lambda, \alpha)$ di un gruppo a un parametro, λ , di funzionali lineari.

5. Resta ora a far vedere, viceversa, che per ogni gruppo a un parametro di funzionali lineari le indicatrici v possono sempre ottenersi da questo sviluppo determinando opportunamente la funzione $h(\lambda, \alpha)$, finora arbitraria. Dato infatti un qualsiasi gruppo a un parametro e supposto, come è sempre possibile, di aver preso il parametro λ in modo che la condizione gruppendale sia espressa dalla (5), calcoliamo le successive derivate delle indicatrici $v(\lambda; \lambda, \alpha)$ rapporto a λ . Avremo

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} v(\lambda; \lambda, \alpha) = \left[\frac{\partial}{\partial k} v(\lambda + k; \lambda, \alpha) \right]_{k=0} = \left[\frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{2\pi i} \int_C v(\lambda; \lambda, t) v(k; t, \alpha) dt \right]_{k=0}$$

per l'equazione (5), e derivando sotto il segno integrale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} v(\lambda; \lambda, \alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C v(\lambda; \lambda, t) \left[\frac{\partial}{\partial k} v(k; t, \alpha) \right]_{k=0} dt \\ (9) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} v(\lambda; \lambda, \alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C v(\lambda; \lambda, t) h(t, \alpha) dt = v(\lambda; \lambda, t) h(t, \alpha) \end{aligned}$$

ove abbiamo indicato con $h(t, \alpha)$ la $\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} v(\lambda; t, \alpha) \right]_{\lambda=0}$ e con C la solita curva separatrice delle singolarità delle due funzioni v e h . Questa funzione $h(t, \alpha)$ si dirà l'indicatrice della trasformazione infinitesima del gruppo, poichè quando in $v(\lambda; \lambda, \alpha)$ il parametro varia di infinitamente poco da λ a $\lambda + d\lambda$, la parte di prim'ordine della variazione di v è precisamente

$$dv = \frac{dv}{d\lambda} d\lambda = v(\lambda; \lambda, t) h(t, \alpha) d\lambda.$$

Vediamo così che in conseguenza della proprietà grupale espressa dalla (5) le indicatrici $v(\lambda; \zeta, \alpha)$ soddisfano all'equazione di tipo integro-differenziale (9); più precisamente la derivata rapporto a λ di $v(\lambda; \zeta, \alpha)$ è uguale al prodotto funzionale della v stessa per una funzione $h(t, \alpha)$, indipendente dal parametro λ .

Se nella (9) deriviamo ancora rapporto a λ , avremo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\partial}{\partial \lambda} v(\lambda; \zeta, t) h(t, \alpha) dt$$

e per la (9) stessa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C v(\lambda; \zeta, t_1) h(t_1, \alpha) h(t, \alpha) dt \\ &= v(\lambda; \zeta, t_1) h(t_1, \alpha) h(t, \alpha) = v(\lambda; \zeta, t) h^2(t, \alpha) \end{aligned}$$

e in generale

$$(10) \quad \frac{\partial^n v}{\partial \lambda^n} = v(\lambda; \zeta, t) h^n(t, \alpha).$$

D'altra parte, per ipotesi, il nostro gruppo contiene l'identità, che, per la (5), corrisponde al valore 0 del parametro λ (cioè $v(0; \zeta, \alpha) = \frac{1}{\zeta - \alpha}$), valore dunque non singolare per la $v(\lambda; \zeta, \alpha)$ che sarà quindi sviluppabile nell'intorno di $\lambda = 0$ in serie di Mac Laurin, ed essendo, per la (10) e per l'osservazione precedente

$$\left(\frac{\partial^n v}{\partial \lambda^n} \right)_{\lambda=0} = v(0; \zeta, t) h^n(t, \alpha) = h^n(\zeta, \alpha)$$

avremo in conclusione

$$v(\lambda; \zeta, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} h^n(\zeta, \alpha)$$

Vediamo dunque che dato un qualsiasi gruppo a un parametro di funzionali lineari, contenente l'identità, l'indicatrice generica $v(\lambda; \zeta, \alpha)$ viene sempre perfettamente definita (coll'elemento che ha per centro $\lambda = 0$) mediante lo sviluppo generale (7) in cui si ponga per $h(\zeta, \alpha)$ l'indicatrice della trasformazione infinitesima, cioè

$$h(\zeta, \alpha) = \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} v(\lambda; \zeta, \alpha) \right]_{\lambda=0}.$$

6. Abbiamo già visto che l'equazione integro-differenziale (9) a cui soddisfa la $v(\lambda; \zeta, \alpha)$ è una conseguenza della proprietà grupale espressa

dalla (5); ma viceversa risulta chiaro dalle considerazioni precedenti che tutte le volte che si ha una funzione $v(\lambda; \gamma, \alpha)$ soddisfacente all'equazione (9) e regolare nell'intorno di $\lambda = 0$, per cui $v(0; \gamma, \alpha) = \frac{1}{\gamma - \alpha}$, il suo sviluppo in serie di Mac-Laurin è del tipo (7) e quindi essa dà, al variare del parametro λ , tutte le indicatrici di un gruppo a un parametro di funzionali lineari. L'equazione (9) è cioè perfettamente equivalente alla (5) e la proprietà gruppale di una semplice infinità di funzionali lineari può essere espressa indifferentemente coll'imporre alle indicatrici di soddisfare all'una o all'altra di queste due equazioni.

L'equazione (5) ci dice inoltre che in un gruppo continuo a un parametro di funzionali lineari due funzionali qualsiasi F e G , corrispondenti rispettivamente ai parametri λ_1 e λ_2 , sono sempre permutabili, poichè i loro prodotti FG o GF corrispondono allo stesso valore $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_1$ del parametro.

Matematica. — Sugli spazi geodeticamente applicabili all'infuori del caso del Dini. Nota⁽¹⁾ di M. GUÉRARD DES LAURIERS, presentata⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La curvatura di

$$ds^2 = 2(v - U) du dv \quad (\alpha)$$

è

$$K = -\frac{1}{v - U} \frac{\partial^2 \log(v - U)}{\partial u \partial v} = \frac{1}{U - v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{v - U} \right) = \frac{U'}{(U - v)^3}.$$

Ne risulta che gli spazi considerati sono euclidei soltanto quando $U' = 0$.

Vediamo se due spazi del tipo (α) possano essere applicabili l'uno sull'altro. Per ciò, bisogna:

$$(5) \quad \frac{U'(u)}{[U(u) - v]^3} = \frac{U'_1(u_1)}{[U_1(u_1) - v_1]^3} \quad \text{con} \quad \begin{cases} u_1 = u_1(u) \\ v_1 = v_1(v) \end{cases}$$

o, ponendo per brevità: $U_1[u_1(u)] = U(u)$:

$$(5)' \quad \frac{U'}{(U - v)^3} = \frac{U' \frac{1}{u'_1(u)}}{(U - v_1)^3}$$

(1) Cfr. Nota precedente in questi « Rend. », fasc. 6, p. 302.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1926.

dalla quale si ricava senza difficoltà:

$$\begin{cases} U = kU + \beta \\ v_1 = kv + \beta \\ u'_1(u) = \frac{1}{k^2} \cdot \end{cases}$$

Dunque due spazi (α) applicabili l'uno sull'altro corrispondono a due funzioni U, U_1 legate dalla relazione:

$$(6) \quad U_1 \left(\frac{u}{k^2} + \alpha \right) = kU(u) + \beta$$

e si passa dall'uno all'altro col cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{u}{k^2} + \alpha \\ v_1 = kv + \beta \end{cases}$$

Per trovare tutti gli spazi applicabili sopra uno spazio dato, bisognerebbe vedere se nella coppia $(\alpha), (\beta)$ uno dei due spazi potesse appartenere al tipo del Dini:

$$d\sigma^2 = (X - Y)(dx^2 + dy^2).$$

Le condizioni sono state date in generale dal Ricci. Se si vuole seguire il metodo da lui indicato, bisogna trattare a parte il caso nel quale la superficie sia applicabile sopra una superficie di rotazione. Per ciò, occorre e basta che:

$$\Delta_1 K = f(K)$$

dove K è la curvatura (non costante) ed f simbolo di funzione arbitraria dell'argomento indicato.

Se si prende

$$ds^2 = 2(v - U) du dv,$$

si ha

$$\Delta_1 K = -\frac{2}{F} \cdot \frac{\partial K}{\partial u} \cdot \frac{\partial K}{\partial v}$$

con

$$F = v - U, \quad K = \frac{U'}{(U - v)^3}$$

e ponendo $U - v = \frac{1}{\rho}$, si ha:

$$K = \rho^3 U' \quad \frac{\partial K}{\partial u} = \rho^3 U'' + 3 \rho^2 U' \cdot (-U' \rho^2) \quad \frac{\partial K}{\partial v} = 3 \rho^2 U' \cdot \rho^2$$

donde

$$\Delta_1 K = 6 K [\rho^3 U'' - 3 K^2]$$

e quindi affinchè si abbia $\Delta_1 K = f(K)$, basta:

$$\frac{D(\rho^3 U', \rho^5 U'')}{D(\rho, u)} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} 3\rho^2 U' & 5\rho^4 U'' \\ \rho^3 U'' & \rho^5 U''' \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$3 U' U''' - 5 U''^2 = 0.$$

Se $U'' = 0$ si ha $U = \alpha u + \beta$ e se $U'' \neq 0$: $U = \gamma + \frac{1}{\sqrt{\alpha u + \beta}}.$

Dunque i « ds^2 » (α) applicabili sopra una superficie di rotazione sono riducibili (trascuando un fattore costante) ad uno dei due tipi:

$$\begin{cases} ds^2 = 2 \cdot (v - u) du dv \\ ds^2 = 2 \left(v - \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du dv \end{cases}$$

i quali costituiscono una stessa coppia, ma non sono applicabili l'uno sopra l'altro perchè le due funzioni u e $\frac{1}{\sqrt{u}}$ non soddisfanno alla relazione (6).

1° $ds^2 = 2(v - u) du dv$. Ponendo $\begin{cases} u = -x + iy \\ v = x + iy \end{cases}$, e poi $x^2 = \sigma$, si raggiunge la forma caratteristica:

$$ds^2 = d\sigma^2 + \sigma^{\frac{2}{3}} d\theta^2.$$

Ed allora, essendo σ l'arco della curva meridiana, si ha:

$$\begin{cases} x^2 = \sigma^{\frac{1}{3}} \\ dx^2 + d\chi^2 = d\sigma^2 \end{cases}$$

e

$$d\chi = \sqrt{9x^4 - 1} dx \quad (O\chi \text{ essendo l'asse di rotazione}).$$

2° $ds^2 = 2 \left(v - \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du dv$. Ricordandoci che le linee $K = c''$ sono i paralleli della superficie, porremo:

$$\begin{cases} u = \rho^2 \\ v = \frac{t}{\sqrt{\rho}} \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} du = t^2 d\rho + 2 t \rho dt \\ dv = -\frac{t}{2\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} + \frac{dt}{\sqrt{\rho}} \end{cases}$$

e

$$du dv = 2 t \sqrt{\rho} \left(dt^2 - t^2 \frac{d\rho^2}{4 \rho^2} \right)$$

e quindi

$$ds^2 = 4 (t^2 - 1) \left[dt^2 - t^2 \frac{d\rho^2}{4 \rho^2} \right].$$

Poniamo

$$2 \sqrt{t^2 - 1} dt = d\sigma, \quad \rho = e^{\theta}$$

viene $ds^2 = d\sigma^2 + f(\sigma) d\theta^2$ dove $f(\sigma) = -t^2 (t^2 - 1)$.

E per la curva meridiana, si avranno le due equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \sqrt{f(\sigma)} = t \sqrt{1 - t^2} \\ d\chi^2 = d\sigma^2 - dx^2 = \frac{4(t^2 - 1)^2 + (2t^2 - 1)^2}{t^2 - 1} dt^2. \end{cases}$$

Ciò fatto, sarebbe possibile di applicare le condizioni del Ricci, ma qui è più semplice d'eseguire il calcolo diretto:

Cambiando come al solito le variabili (x, y) mediante le formole:

$$\begin{cases} x + iy = \sqrt{2} u_1, \\ x - iy = \sqrt{2} v_1, \end{cases}$$

ridurremo il $d\sigma^2 = (X - Y)(dx^2 + dy^2)$ alla forma

$$d\sigma^2 = 2 \left[X \left(\frac{u_1 + v_1}{\sqrt{2}} \right) - Y \left(\frac{u_1 - v_1}{\sqrt{2}} \right) \right] du_1 dv_1.$$

Affinchè $ds^2 = 2(v - U) du dv$ sia del tipo di $d\sigma^2$, bisogna che, ponendo

$$\begin{cases} u = U(u_1) \\ v = V(v_1) \end{cases}, \text{ si abbia}$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial v_1^2} \quad (\text{con } ds^2 = 2 F_1 du_1 dv_1).$$

Ora

$$F_1 = \{ V(v_1) - U[U(u_1)] \} U'(u_1) V'(v_1).$$

Poniamo per brevità

$$U'(u_1) \cdot U[U(u_1)] = U_1(u_1)$$

in modo che

$$F_1 = U' V V' - U_1 V'$$

dove U' , U_1 , V' non sono zero, e di più, il rapporto $\frac{U_1}{U'} = U$ non è una costante.

L'equazione (7) si scrive:

$$(8) \quad U''' V V' - U_1'' V' = U' (V V''' + 3 V' V'') - U_1 V'''.$$

Dividendo per V' che non è zero, e poi derivando rispetto a v_1 , viene:

$$(9) \quad U''' V' = U' \left[\left(\frac{V V'''}{V'} \right)' + 3 V'' \right] - U_1 \left[\frac{V'''}{V'} \right].$$

Dividendo per U' e derivando rispetto ad u_1 :

$$\left[\frac{U'''}{U'} \right]' V' = - \left[\frac{U_1}{U'} \right]' \left[\frac{V'''}{V'} \right].$$

Ora, $\frac{U_1}{U'}$ non essendo costante, $\left[\frac{U_1}{U'} \right]'$ non è nulla, e quindi si ha:

$$\begin{cases} \left[\frac{V'''}{V'} \right]' = k V' \\ - \left[\frac{U'''}{U'} \right]' = k \left[\frac{U_1}{U'} \right]' \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} V''' = k V V' + \alpha V' \\ - U''' = k U_1 + \beta U' \end{cases}$$

dove k, α, β sono tre costanti.

Riportando nella (9), si trovano le due condizioni:

$$k = 0 \quad ; \quad \beta = -4\alpha$$

ed allora, integrando, si ha:

$$\begin{cases} V'' = \alpha V + \gamma \\ U'' = 4\alpha U + 2\delta \end{cases}$$

e riportando nella (8), si ottiene:

$$4\alpha U' V V' - U_1'' V' = U' [\alpha V V' + 3 V' (\alpha V + \gamma)] - \alpha V' U_1$$

donde

$$U_1'' = \alpha U_1 - 3\gamma U'.$$

Dunque, si hanno per determinare le due funzioni U_1 ed U le due equazioni:

$$\begin{cases} U'' = 4\alpha U + 2\delta \\ U_1'' = \alpha U_1 - 3\gamma U'. \end{cases}$$

1° Se $\alpha = 0$,

$$\begin{cases} U = \delta u_1^2 + 2\alpha u_1 + b \\ U_1 = -\gamma \delta u_1^3 - 3\gamma \alpha u_1^2 + c u_1 + d \end{cases}$$

e

$$U = \frac{U_1}{U'} = \frac{-\gamma \delta u_1^3 - 3\gamma \alpha u_1^2 + c u_1 + d}{2(\delta u_1 + \alpha)}$$

con

$$u = U(u_1) = \delta u_1^2 + 2\alpha u_1 + b.$$

Basta allora sostituire la variabile u alla variabile u_1 . Si trova infine, secondo che δ sia, o non sia zero:

$$U = \alpha u^2 + b u + c$$

$$U = \alpha u + b + \frac{c}{\sqrt{u + \alpha}}.$$

E quando $\alpha = 0$, si ritrovano i due spazi $ds^2 = 2(v - u) du dv$;
 $ds^2 = 2 \left(v - \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du dv.$

2° Se $\alpha \neq 0$, poniamo $\alpha = \omega^2$, allora

$$\begin{cases} U''' = 4\omega^2 U' \\ U'' = \omega^2 U - 3\gamma U' \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} U' = c_1 e^{2\omega u_1} + c_2 e^{-2\omega u_1} \\ U = \gamma_1 e^{\omega u_1} + \gamma_2 e^{-\omega u_1} - \frac{\gamma}{\omega^2} U' \end{cases}$$

$$U = \frac{U_1}{U'} = -\frac{\gamma}{\omega^2} + \frac{\gamma_1 e^{\omega u_1} + \gamma_2 e^{-\omega u_1}}{c_1 e^{2\omega u_1} + c_2 e^{-2\omega u_1}}$$

e

$$\frac{du}{du_1} = U' = c_1 e^{2\omega u_1} + c_2 e^{-2\omega u_1}$$

$$(10) \quad 2\omega u = c_1 e^{2\omega u_1} - c_2 e^{-2\omega u_1}.$$

Se $c_2 = 0$, si ha

$$U = -\frac{\gamma}{\omega^2} + \frac{\gamma_1}{c_1} e^{-\omega u_1} + \frac{\gamma_2}{c_1} e^{-3\omega u_1}$$

con

$$2\omega u = c_1 e^{2\omega u_1}$$

donde

$$U = \frac{a}{\sqrt{u}} + \frac{b}{u\sqrt{u}}$$

Se $c_1 c_2 \neq 0$, si trae dalla (10):

$$c_1 e^{2\omega u_1} = \omega u \pm \sqrt{\omega^2 u^2 + c_1 c_2}$$

$$c_2 e^{-2\omega u_1} = -\omega u \pm \sqrt{\omega^2 u^2 + c_1 c_2}$$

e

$$U = -\frac{\gamma}{\omega^2} + \frac{k_1 \sqrt{\omega u \pm \sqrt{\omega^2 u^2 + c_1 c_2}} + k_2 \sqrt{-\omega u \pm \sqrt{\omega^2 u^2 + c_1 c_2}}}{\pm \sqrt{\omega^2 u^2 + c_1 c_2}}$$

Ma

$$\sqrt{\omega u + \sqrt{\omega^2 u^2 + c_1 c_2}} = \sqrt{\frac{\omega u + \sqrt{-c_1 c_2}}{2}} + \sqrt{\frac{\omega u - \sqrt{-c_1 c_2}}{2}}$$

e

$$\sqrt{\omega^2 u^2 + c_1 c_2} = \sqrt{\omega u + \sqrt{-c_1 c_2}} \sqrt{\omega u - \sqrt{-c_1 c_2}}$$

Donde si ricava senza difficoltà la forma:

$$U = -\frac{\gamma}{\omega^2} + \frac{a}{\sqrt{u+k}} + \frac{b}{\sqrt{u-k}}.$$

Così gli spazi (α) che appartengono al tipo di Dini corrispondono alle quattro funzioni:

$$\begin{array}{ll} 1) & U = au^2 + bu \\ 2) & U = au + \frac{b}{\sqrt{u}} \\ 3) & U = \frac{a}{\sqrt{u}} + \frac{b}{u\sqrt{u}} \\ 4) & U = \frac{a}{\sqrt{u+k}} + \frac{b}{\sqrt{u-k}} \end{array}$$

(trascurando le costanti additive). Ma, di più; per la relazione di reciprocità (R): 1° le funzioni (1) e le funzioni (3) si corrispondono; 2° le funzioni (2) si corrispondono fra di loro; 4° le funzioni (4) si corrispondono fra di loro.

Matematica. — *La risoluzione apiristica delle congruenze binomie e la formula di interpolazione di Lagrange.* Nota di GAETANO SCORZA presentata⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

Alla risoluzione *apiristica* di una congruenza binomia il prof. Cipolla ha dedicato tutta una serie di Note interessanti⁽²⁾, il cui risultato centrale è il seguente⁽³⁾:

Se p è un numero primo, n è un divisore di $p-1$ ed $r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{n}}$ è un sistema completo di n -esimo grado (mod. p), posto

$$(1) \quad A_b \equiv -n \left(r_1^{nb-1} + r_2^{nb-1} + \dots + r_{\frac{p-1}{n}}^{nb-1} \right) \pmod{p}$$

il polinomio

$$(2) \quad A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_{\frac{p-1}{n}-1} a^{\frac{p-1}{n}-1}$$

(1) Nella seduta del 21 marzo 1926.

(2) M. CIPOLLA: a) *Formole di risoluzione della congruenza binomia quadratica e bi-quadratica* (« Rendic. della R. Accad. delle Scienze fis. e mat. di Napoli », gennaio 1905); b) *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo* (« Math. Ann. », Bd. LXIII, 1906); c) *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie*, Note 1^a e 2^a (questi « Rendiconti », fasc. 8^o e 9^o del vol. XVI della serie 5^a, 1^o semestre 1907).

(3) Cfr. loc. cit. (2) b), n. 3.

per ogni a residuo n.ico di p fornisce una soluzione della congruenza binomia

$$(3) \quad x^n \equiv a \pmod{p}.$$

La dimostrazione di questo teorema indicata dal prof. Cipolla, consistendo nel verificare che la (2), sotto l'ipotesi (1), fornisce realmente una soluzione della (3), non dà affatto ragione della struttura della formula (1).

Mi pare pertanto che valga la pena di far vedere come al teorema del prof. Cipolla si possa pervenire in maniera da rendere esatto conto del perchè i coefficienti del polinomio (2) debbano esser definiti da una formula del tipo (1).

Per questo, atteso che una congruenza, rispetto a un numero primo (o, più generalmente, rispetto ad un ideale primo) come modulo, è niente altro che un'equazione nel corpo numerico (finito) costituito da un qualsiasi sistema completo di resti rispetto al modulo, mi varrò in quanto segue del linguaggio della teoria dei corpi numerici⁽¹⁾; e per la chiarezza dell'esposizione non tralascerò di richiamare rapidamente nel n. 1 i semplici e ben noti principii sui quali è fondato il procedimento.

1. Detto n un intero positivo, un numero non nullo a di un corpo numerico si dice, come è noto, una *potenza n-esima*, se è possibile determinare nel corpo un numero (non nullo) α , per il quale si abbia $a = \alpha^n$.

Ciò posto sia C un corpo numerico finito con N elementi (sì che per N sussisterà un'eguaglianza della forma $N = p^n$, con p numero primo).

Si dimostra subito che:

Indicato con δ il massimo comune divisore di n ed $N-1$, in C non esistono che $\frac{N-1}{\delta}$ potenze *n-esime*;

e che:

Ognuna di queste è potenza *n-esima* di δ numeri di C .

Infatti sia ρ un numero primitivo⁽²⁾ di C , di guisa che i numeri non nulli di C saranno dati da

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{N-1} = 1.$$

Fra questi ρ^b sarà una potenza *n-esima*, se, e solo se, esiste nella serie $1, 2, \dots, N-1$ un intero x per il quale si abbia

$$(\rho^x)^n = \rho^{nx} = \rho^b,$$

ossia

$$nx \equiv b \pmod{N-1}.$$

(1) Per la teoria generale dei corpi numerici vedi ad es. G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921).

(2) Cfr. loc. cit., (4), p. 123.

Ora questa congruenza ammette soluzioni, se, e solo se, h è divisibile per δ ; e in caso che h sia divisibile per δ , ammette δ soluzioni incongrue; dunque, posto

$$t = \frac{N-1}{\delta},$$

le potenze n^{esima} di C sono

$$a_1 = \rho^{\delta}, a_2 = \rho^{2\delta}, \dots, a_t = \rho^{t\delta}$$

e ciascuna di esse è potenza n^{esima} di δ numeri di C .

Con ciò le due affermazioni fatte sono dimostrate.

Da

$$a_j = \rho^{j\delta} \quad (j = 1, \dots, t)$$

segue

$$a_j^t = \rho^{j\delta t} = \rho^{j(N-1)} = (\rho^{N-1})^j = 1;$$

dunque:

Un numero di C è potenza n^{esima} quando, e solo quando, è radice della equazione

$$(4) \quad x^t - 1 = 0.$$

2. E adesso si consideri in C l'equazione binomia

$$(5) \quad x^n - a = 0,$$

con $a \neq 0$, la quale naturalmente sarà priva di radici o ne avrà δ , secondo che a non è od è una potenza n^{esima} .

Risolverla *apiristicamente* significa costruire un polinomio in C di grado $\leq t-1$

$$(6) \quad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{t-1} x^{t-1},$$

tale che per ogni a potenza n^{esima} di C $f(a)$ risulti una radice dell'equazione (5).

Evidentemente, mantenuti per le a_1, a_2, \dots, a_t i significati già chiariti, il polinomio $f(x)$ soddisfa alla condizione voluta, se, e solo se, è

$$(7) \quad f(a_1) = r_1, \quad f(a_2) = r_2, \dots, f(a_t) \neq r_t,$$

essendo r_j uno qualunque dei δ numeri la cui potenza n^{esima} è a_j ($j = 1, \dots, t$).

Ora, fissati i numeri r_1, r_2, \dots, r_t , le (7) individuano univocamente $f(x)$; e il sistema di numeri r_1, r_2, \dots, r_t può fissarsi in δ^t modi differenti, dunque:

L'equazione binomia (5) è risolubile apiristicamente; di polinomi atti a risolverla in siffatta maniera ne esistono

$$\frac{N-1}{\delta}$$

e la determinazione di tali polinomi non è che un problema di interpolazione.

3. Passiamo adesso alla costruzione effettiva del polinomio (6) per il quale sussistono le (7).

Il polinomio $f(x)$ di grado $\leq t-1$, che soddisfa alle condizioni (7), può essere espresso intanto nella forma classica Lagrangiana

$$f(x) = \sum_j^{1 \dots t} r_j \frac{(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_{j-1})(x-a_{j+1}) \dots (x-a_t)}{(a_j-a_1)(a_j-a_2) \dots (a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1}) \dots (a_j-a_t)},$$

ossia

$$f(x) = \sum_j^{1 \dots t} r_j \frac{\varphi(x)}{\varphi'(a_j)(x-a_j)},$$

ove si ponga

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_t),$$

e con $\varphi'(x)$ si indichi la derivata di $\varphi(x)^{(1)}$.

Ora, giacchè a_1, a_2, \dots, a_t , per quanto più sopra è stato detto, sono le radici della (4), è

$$\varphi(x) = x^t - 1,$$

indi

$$\frac{\varphi'(x)}{x-a_j} = \frac{0 \dots t-1}{\sum_b} a_j^{t-b-1} x^b = \sum_b^{0 \dots t-1} r_j^{n(t-b-1)} x^b,$$

e

$$(8) \quad \varphi'(a_j) = t a_j^{t-1} = t r_j^{n(t-1)},$$

dunque resta

$$(9) \quad f(x) = \frac{1}{t} \sum_j^{1 \dots t} \sum_b^{0 \dots t-1} r_j^{t-nb} x^b;$$

cioè il polinomio (6) soddisfa alle condizioni (7) quando, e solo quando, è

$$(10) \quad A_b = \frac{1}{t} \sum_j^{1 \dots t} r_j^{t-nb}.$$

Avvertasi che perchè nella (8) il fattore t e nelle (9) e (10) il fattore $\frac{1}{t}$ siano, come di dovere, numeri di C , bisogna pensare t non come

(1) Cfr. loc. cit., (4), p. 161.

simbolo di numero intero, ma come simbolo di un conveniente numero di C , a norma di una ben nota convenzione⁽¹⁾,

Secondo tale convenzione in C si ha $p = 0$ indi $N = 0$; per conseguenza in C si può porre

$$t = -\frac{1}{\delta},$$

e la (10) diventa

$$(11) \quad A_b = -\delta \sum_j^{1 \dots t} r_j^{t-nb}.$$

4. Se i numeri di C godono della proprietà che le loro potenze *n-esime* danno tutte le potenze *n-esime* di C , della medesima proprietà godono evidentemente i loro reciproci; ma cambiando r_j in $\frac{1}{r_j}$ la (11) diventa

$$(12) \quad A_b = -\delta \sum_j^{1 \dots t} r_j^{nb-1},$$

dunque il polinomio (6) è atto a fornire una soluzione apiristica dell'equazione (5) anche quando i coefficienti A_b vi si intendano definiti dalla (12).

Ora la (12) equivale alla (1) del prof. Cipolla, quando si supponga che sia $N = p$, che n sia un divisore di $p-1$ e che C sia il corpo numerico costituito da un sistema completo di resti rispetto al modulo p .

Matematica. — *Sul significato geometrico della normale proiettiva.* Nota di ALESSANDRO TERRACINI, presentata dal Corrispondente FUBINI.

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Formula d'inversione di due integrazioni doppie « con asterisco ».* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Corrisp. SEVERI.

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr. loc. cit., (6).

Matematica. — *Sulla unicità delle funzioni interpolari soddisfacenti a certe condizioni asintotiche.* Nota di VLADIMIRO BERNSTEIN, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. *Sopra una classe di sistemi anolonomi.* Nota di GIORGIO VRANCEANU, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Questa nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato.* Nota di E. BOMPIANI presentata⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In una Memoria del 1912 *Sull'equazione di Laplace*⁽²⁾ ho considerato, forse per il primo, la rappresentazione di una superficie di S_3 , o meglio del complesso delle sue tangenti, sulla quadrica Q di S_3 che rappresenta lo spazio S_3 rigato: ed ho mostrato come i criteri di chiusura della successione di Laplace, ivi stabiliti, offrano in modo quasi immediato proprietà delle superficie le cui asintotiche, in uno o in tutt'e due i sistemi, appartengano a complessi lineari.

L'opportunità di costruire la geometria proiettivo-differenziale di una superficie considerata come un ente dello spazio rigato è stata riconosciuta di recente, e senza ricorrere al mio lavoro, dal Thomsen⁽³⁾; il quale ha dato una trattazione analitica unitaria di varie geometrie, astrattamente identiche, con un procedimento di calcolo che muove da quello del Ricci ma è necessariamente più complicato.

Io ritengo però la considerazione iperspaziale diretta più semplice e perciò più feconda: anche perchè i vari mezzi che dal 1912 sono andato

(1) Nella seduta dell'11 aprile 1926.

(2) « Rendic. Circolo Matem. di Palermo », t. XXXIV.

(3) G. THOMSEN, *Ueber eine gemeinsame Behandlungsweise verschiedener Differentialgeometrien* (« Math. Zeitschrift », Bd. 21, 1924); *Zur Differentialgeometrie in dreidimensionalen Räume* (« Jahresbericht der Deut. Math. Verein », Bd. XXXIV, 1925); *Ueber eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung* (« Abhand. Math. Sem. Hamburg », Bol. IV, 1925).

costruendo per lo studio di una superficie iperspaziale ne offrono una conoscenza approfondita, i cui vantaggi possono essere facilmente apprezzati con interpretazioni nello spazio ordinario. Poichè qui non troverebbe luogo una esposizione sistematica della teoria delle superficie da questo punto di vista mi limiterò a darne un saggio con due risultati nuovi: 1° la costruzione con soli birapporti (e indipendentemente da qualsiasi normalizzazione) della curvatura proiettiva, secondo Fubini, di una superficie σ di S_3 ; 2° la caratterizzazione delle congruenze (∞^2) di schiere quadriche che riescono osculatrici alle rigate costituite dalle tangenti asintotiche di un sistema lungo una linea di Darboux su σ .

2. Prima di entrare in argomento mi procuro il *significato geometrico del rapporto degli invarianti di una equazione differenziale di Laplace*:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial y}{\partial u} + b \frac{\partial y}{\partial v} + cy = 0$$

(a, b, c funzioni di u, v). Con gli invarianti relativi

$$(2) \quad h = \frac{\partial a}{\partial u} + ab - c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab - c$$

si forma l'invariante assoluto h/k .

È noto che $n + 1$ soluzioni indipendenti y_i della (1) si possono interpretare come coordinate proiettive omogenee di un punto y che al variare di u, v descrive una superficie di S_n , sia Φ , dotata di un doppio sistema coniugato costituito dalle linee u ($dv = 0$) e v ($du = 0$). Il procedimento di trasformazione di Laplace, che consiste nel passare dalle y_i alle funzioni

$$(3) \quad y_i^+ = \frac{\partial y_i}{\partial v} + ay_i \quad \text{ovvero} \quad y_i^{-1} = \frac{\partial y_i}{\partial u} + by_i$$

soluzioni delle *trasformate di Laplace* della (1) equivale geometricamente ad associare alla superficie Φ la superficie Φ_+ (ovvero Φ_{-1}) luogo degli spigoli di regresso delle sviluppabili circonscritte a Φ lungo le linee u (o rispettivamente v).

Il piano tangente a Φ nel punto y riesce osculatore alla linea u di Φ_+ passante per y^+ e così pure alla linea v di Φ_{-1} passante per y^{-1} ; sicchè in esso si trovano due coniche (bitangenti) una osculatrice in y^+ alla linea u di Φ_+ e l'altra osculatrice in y^{-1} alla v di Φ_{-1} , e ciascuna tangente nell'altro punto alla linea indicata che vi passa.

h/k è l'invariante di Segre (relativo ad uno qualsiasi dei punti di contatto) delle due coniche bitangenti⁽¹⁾. Se $h = k$ le due coniche coincidono e

(1) C. SEGRE, *Su alcuni punti singolari ecc.* (« Rend. Acc. dei Lincei », vol. VI, 1897) e la mia Nota: *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane* (ibidem, s. 6, vol. III, 1926). Quest' invariante è il limite di un birapporto.

si ha il teorema di Koenigs che caratterizza le equazioni ad invarianti eguali ⁽¹⁾.

3. Ciò premesso, passiamo alla rappresentazione del complesso delle tangenti di σ sulla iperquadrica $Q(V_4^2)$ di S_5 ⁽²⁾. Poichè nel complesso vi sono ∞^2 fasci esso si rappresenta in una V_3 contenente ∞^2 rette di Q . Una tangente asintotica di σ è comune a due fasci infinitamente vicini; e poichè ogni fascio ne contiene due risulta che ogni retta di V_3 è incontrata da due delle infinitamente vicine; o in altri termini V_3 contiene ∞^1 sviluppabili distribuite in due sistemi distinti: ciascuna superficie focale (a cui quelle rette sono tangenti) rappresenta la congruenza delle tangenti asintotiche di un sistema.

Sia Φ (appartenente a Q) una di esse. Φ possiede un doppio sistema coniugato; e precisamente:

1° le linee del sistema che hanno per tangenti rette di V_3 (quindi di Q) rappresentano le sviluppabili delle tangenti alle linee asintotiche di un sistema su σ ;

2° l'altra famiglia di linee del sistema coniugato su Φ rappresenta le rigate aventi per generatrici le tangenti asintotiche già considerate circoscritte a σ lungo le asintotiche dell'altro sistema.

Siano le prime le linee u , le seconde le linee v di Φ . Il piano osculatore in un punto y alla linea v sega Q in una conica osculatrice in y a v : questa rappresenta una schiera quadrica osculatrice (o regolo osculatore) ad una delle rigate nominate in 2° secondo una generatrice (cioè determinata da tre generatrici infinitamente vicine). Poichè i due regoli relativi ad un punto di σ (cioè alle asintotiche per esso) appartengono ad una stessa quadrica detta di Lie, li diremo *regoli di Lie*. In conclusione: un sistema di regoli di Lie della superficie σ è rappresentato su Q dalle intersezioni, con Q , degli ∞^2 piani osculatori alle linee v di Φ ; o brevemente, dai piani stessi.

Viceversa: *quand'è che una congruenza ∞^2 di piani in S_5 rappresenta un sistema di regoli di Lie relativi ad una superficie σ di S_5 ?* ⁽³⁾

4. Rileviamo alcuni caratteri della ∞^2 di piani ottenuta. Per proprietà note della (1) o dei sistemi coniugati, i piani osculatori alle linee v di Φ sono tangenti alla superficie trasformata Φ_1 , la quale ha pure un doppio sistema coniugato: anzi la prima trasformata di Laplace della Φ_1 secondo le linee u

(1) Una dimostrazione proiettiva di questo teorema si trova nella mia Nota: *Risoluzione geometrica del problema di Moutard* ecc. (« Rendic. Lincei », s. 5, vol. XXIV, 1915), n. 6; lo stesso calcolo là fatto serve nel caso attuale.

(2) Riporto questi primi chiarimenti dalla citata Memoria *Sull'equazione di Laplace*.

(3) Il SEGRE, nella Memoria *Su alcune classi particolari di sistemi continui di quadriche e sui rispettivi involuppi* (« Scritti Matem. », offerti ad E. D'Ovidio, Torino, Bocca, 1918), si è proposto di caratterizzare, in S_5 , alcune congruenze di regoli di S_3 ; ma non si è posta questa domanda.

è proprio la Φ ; e la seconda trasformata nello stesso verso è l'altra superficie focale Φ^* di V_3 (che rappresenta l'altra congruenza di tangenti asintotiche di σ). Orbene, le proprietà ora esposte caratterizzano le congruenze di piani volute; cioè:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una congruenza di piani in S_3 rappresenti un sistema di regoli di Lie relativi ad una superficie σ di S_3 , è che i suoi piani siano tangenti ad una superficie Φ_1 possedente un doppio sistema coniugato, e che le due trasformate successive di Φ_1 nello stesso senso entro la successione di Laplace, Φ e Φ^ , appartengano a Q . Inoltre: la trasformata Φ_1^* di Φ^* (sempre nello stesso senso) rappresenta, con i suoi piani tangenti, i regoli dell'altro sistema sulle quadriche di Lie relative a σ ; o in breve: Φ_1 e Φ_1^* rappresentano (segando i loro piani tangenti con Q) le quadriche di Lie relative ad una superficie σ di S_3 ⁽¹⁾.*

Le condizioni caratteristiche per Φ_1 (affinchè rappresenti un sistema di regoli di Lie relativi ad una σ) si possono enunciare anche indipendentemente dalla seconda trasformata Φ^* .

Condizione caratteristica per le ∞^2 di piani in questione è la seguente: essi sono tangenti ad una superficie Φ_1 che possiede un doppio sistema coniugato; la trasformata di Laplace, secondo una famiglia di linee, siano le u , del sistema appartiene a Q e gli S_3 osculatori alle linee u di Φ_1 sono tangenti a Q .

5. La superficie σ di S_3 sia descritta dal punto di coordinate $x_i(u, v)$ e le linee u, v siano le sue asintotiche (non rettilinee). Se le x_i sono le coordinate normali di Fubini esse soddisfano al sistema ⁽²⁾

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v} + n x \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \gamma \frac{\partial x}{\partial u} + v x \end{cases}$$

Le tangenti alle linee u hanno per coordinate

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 \frac{\partial x_2}{\partial u} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} & , & & p_2 &= x_1 \frac{\partial x_3}{\partial u} - x_3 \frac{\partial x_1}{\partial u} & , & & p_3 &= x_1 \frac{\partial x_4}{\partial u} - x_4 \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ p_4 &= x_3 \frac{\partial x_4}{\partial u} - x_4 \frac{\partial x_3}{\partial u} & , & & p_5 &= x_4 \frac{\partial x_2}{\partial u} - x_2 \frac{\partial x_4}{\partial u} & , & & p_6 &= x_2 \frac{\partial x_3}{\partial u} - x_3 \frac{\partial x_2}{\partial u} \end{aligned}$$

e l'equazione di Q è $p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$. Se si formano le derivate

(1) Da questo criterio si passa subito a quello dato dal Thomsen (nel terzo dei lavori citati) che riguarda le quadriche (invece che i regoli) di Lie.

(2) FUBINI e ČECH, *Geometria proiettiva differenziale* («G. P. D.», Bologna, Zanichelli, 1926; cap. II, § 16, A). Qui si conduce il calcolo in coordinate normali, ma il risultato ne è affatto indipendente.

delle p , tenendo conto delle (4) si vede ch'esse soddisfano all'equazione di Laplace

$$(5) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} - \left(\frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} + \beta \gamma \right) p = 0$$

questa è l'equazione relativa a Φ ; i suoi invarianti valgono

$$(6) \quad h = - \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} + \beta \gamma^{(1)}, \quad k = \beta \gamma.$$

Analogamente per l'equazione relativa a Φ^* si hanno gli invarianti

$$(6') \quad h^* = \beta \gamma, \quad k^* = - \frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \partial v} + \beta \gamma.$$

La somma dei due invarianti assoluti relativi a Φ e a Φ^* è quindi

$$\frac{h}{k} + \frac{k^*}{h^*} = - \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} + 2^{(2)}$$

sicchè: la curvatura media proiettiva di una superficie σ , secondo Fubini, cioè $-\frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v}$ è uguale alla somma (diminuita di due) dei due birapporti che danno gli invarianti assoluti ($n. 2$) delle superficie Φ e Φ^* che, sulla quadrica delle rette in S_5 , rappresentano le due congruenze delle tangenti asintotiche di σ .

Questa interpretazione della curvatura proiettiva è del tutto soddisfacente perchè la riconduce ad un calcolo di birapporti ed è indipendente dalla normalizzazione delle coordinate di σ .

6. Sopra una superficie di S_5 ho definito ⁽³⁾ certi sistemi doppi di curve che ho chiamato *coniugati di seconda specie* ed ho mostrato che se la superficie possiede un doppio sistema coniugato ordinario, come accade per Φ , vi sono in ogni punto tre *tangenti autoconiugate di seconda specie o principali*.

Proprietà caratteristica delle *linee principali* (da esse inviluppate) è che lo S_3 osculatore ad una di esse in un punto è contenuto nello S_4 ivi osculatore alla superficie. Si trova subito che: le *linee principali di Φ (o di Φ^*) rappresentano le rigate (delle tangenti) asintotiche (di un sistema) circonscritte a σ lungo le linee di Darboux. La loro proprietà caratteristica equivale al teorema di Čech per cui le rigate costituite dalle tangenti asintotiche dei*

(1) Se $h=0$ le asintotiche di un sistema su σ appartengono a complessi lineari (cfr. *Sull'equazione di Laplace*, n. 17) e si ha l'equazione di ČECH («G. P. D.», p. 113).

(2) Quando quest'invariante è uguale a zero si ritrovano le superficie di ČECH («G. P. D.», p. 151).

(3) *Sistemi coniugati sulla superficie degli iperspazi* («Rend. Circ. Matem. di Palermo», 1922, § 6) e anche, per il seguito, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* («Atti Acc. di Torino», 1913, n. 7).

due sistemi lungo una linea di Darboux hanno questa linea flecnodale e ciascuna rigata è costituita dalle tangenti quadripunte dell'altra. Inoltre:

Condizione necessaria e sufficiente affinché ∞^2 regoli di S_3 siano quelli osculatori alle rigate asintotiche lungo le curve di Darboux di una superficie σ è che i piani rappresentativi in S_3 siano osculatori alle linee principali di una superficie Φ che possieda un doppio sistema coniugato le cui tangenti in un sistema siano rette di Q .

7. In ogni punto p di Φ si costruisca la coniugata armonica di una tangente principale rispetto alle tangenti alle linee u, v ; queste tangenti inviluppano un nuovo sistema di curve, rappresentanti le rigate asintotiche di un sistema circoscritte a σ lungo le linee di Segre. I piani osculatori in p ad una linea principale e a quella ora costruita (che ha per tangente la coniugata armonica, ecc.) si tagliano in una retta; e le tre rette così ottenute, per le tre linee principali, stanno in un piano π (passante per p). Ne segue:

In un punto P di σ si consideri una linea di Darboux, la linea di Segre coniugata e i regoli osculatori in P alle rigate asintotiche (di un sistema) circoscritte lungo esse a σ . Questi due regoli hanno in comune, oltre alla generatrice (tangente asintotica) in P , un'altra retta: le tre rette che così si ottengono (variando la linea di Darboux per P) stanno con la generatrice per P in una stessa schiera (e vi formano una quaterna equianarmonica); alla quadrica sostegno della schiera appartiene l'altra tangente asintotica per P .

La quadrica ora trovata e quella di Lie in P si tagliano ulteriormente in altre due rette.

Un'altra quadrica (pure invariante per applicabilità proiettive) si ottiene scambiando i due sistemi di asintotiche; queste due quadriche coincidono (fra loro e con quella di Lie) se e solo se la superficie è una superficie di coincidenza⁽¹⁾.

8. FASCIO CANONICO. — Siano p^1, p, p^*, p^{1*} punti corrispondenti nella trasformazione di Laplace su $\Phi_1, \Phi, \Phi^*, \Phi_1^*$. Il piano π (n. 7) costruito in p taglia la retta $p^* p^{1*}$ in un punto, sia \bar{p}^* ; analogamente il piano π^* relativo al punto p^* di Φ^* taglia la $p p^1$ in un punto \bar{p} . La proiettività in cui ai punti p, p^1, \bar{p} corrispondono ordinatamente i punti p^*, p^{1*}, \bar{p}^* determina una quadrica, il cui S_3 è quello dei due piani di Q passanti per pp^* : le due generatrici della quadrica situate in questi due piani (e diverse dalla pp^*) rappresentano il fascio canonico di σ in P e il suo polare rispetto alla quadrica di Lie (relativa a P); in particolare: i punti di contatto di questi piani con la quadrica rappresentano la tangente canonica e la sua coniugata; i punti ove essi sono incontrati dalla retta $p^1 p^{1*}$ rappresentano le direttrici di Wilczynski, etc.

(1) Da me caratterizzate in più modi; p. es. esse sono tutte proiettivamente applicabili sulla sfera proiettiva $xyz = 1$; cfr. *Contributo alla geometria proiettivo-differenziale* ecc. («Bollett. Unione Mat.», 1924 e «G. P. D.», p. 157).

Meccanica. — *Sulla durata delle piccole oscillazioni del più generale pendolo curvilineo.* Nota di MAURO PICONE, presentata⁽¹⁾ dal Socio ROBERTO MARCOLONGO.

Sia fissata nello spazio (x, y, z) una curva regolare C , di arco s e di equazioni parametriche $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, la quale, per semplificare, sarà supposta analitica. Indicherò con $f(s)$ e $\tau(s)$, rispettivamente, la flessione e la torsione della C , con α, β, γ i coseni direttori della tangente alla C ; con ξ, η, ζ i coseni direttori della normale principale e con λ, μ, ν i coseni direttori della binormale e supporrò le funzioni analitiche $f(s)$ e $\tau(s)$ sempre finite.

Detto O il punto più basso della C supporrò tale punto interno alla C e disporrò l'asse delle z verticale e volto verso l'alto, ponendo in O l'origine delle coordinate, e a partire da O conterò l'arco s su C .

Sulla C scorra liberamente, senza incontrare attrito, un punto materiale pesante G ; è noto che, concepito il punto G abbandonato a sè, con velocità nulla; in un punto di C di arco $\sigma > 0$, il tempo che impiega G a trasferirsi nel punto più basso O di C , a compiere cioè una semioscillazione, è dato da

$$T(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\sigma \frac{ds}{\sqrt{z(\sigma) - z(s)}}.$$

La funzione $z(s)$ ha il minimo valore ($= 0$) nel punto $s = 0$, interno all'intervallo che deve descrivere s per avere i punti della C , e pertanto l'ordine della prima derivata di $z(s)$, diversa da zero per $s = 0$, sarà pari, e tale derivata sarà positiva. Si abbia dunque, designando n un numero intero ≥ 1 ,

$$(1) \quad z(0) = z'(0) = \dots = z^{(2n-1)}(0) = 0, \quad z^{(2n)}(0) > 0;$$

possiamo scrivere

$$z(s) = \frac{z^{(2n)}(0)}{(2n)!} s^{2n} + \omega(s) s^{2n+1},$$

ove $\omega(s)$ è una funzione analitica di s , sempre finita in un certo intorno del punto $s = 0$. Ne segue, mantenendo σ in quell'intorno,

$$T(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\sigma \frac{ds}{\sqrt{\frac{z^{(2n)}(0)}{(2n)!} (\sigma^{2n} - s^{2n}) + (\sigma^{2n+1} - s^{2n+1}) \omega(\sigma) + s^{2n+1} [\omega(\sigma) - \omega(s)]}},$$

(1) Nella seduta del 7 marzo 1926.

e quindi, posto $s = \sigma \sin \varphi$,

$$\sigma^{n-1} T(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{D(\sigma, \varphi)}},$$

ove

$$D(\sigma, \varphi) = \frac{\chi^{(2n)}(0)}{(2n)!} (1 + \sin^2 \varphi + \dots + \sin^{2n-2} \varphi) + \\ + \sigma \frac{1 + \sin \varphi + \dots + \sin^{2n} \varphi}{1 + \sin \varphi} \omega(\sigma) + \sigma^2 \frac{\sin^{2n+1} \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{\omega(\sigma) - \omega(\sigma \sin \varphi)}{\sigma - \sigma \sin \varphi},$$

donde la formola

$$(2) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} [\sigma^{n-1} T(\sigma)] = \sqrt{\frac{(2n)!}{2g \chi^{(2n)}(0)}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi + \dots + \sin^{2n-2} \varphi}},$$

che non ho mai visto scritta, se non nel caso particolare $n = 1$, nel quale si riduce alla seguente:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} T(\sigma) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{g \chi''(0)}}.$$

Per ogni funzione $F(s)$ porrò, per brevità, $F_0 = F(0)$.

Se nelle (1) è $n = 1$, riesce $\gamma_0 = 0$, $\chi''(0) = f_0 \zeta_0 > 0$, e si trova perciò dalla (2), fattovi $n = 1$, per un approssimato valore della durata delle piccole semioscillazioni, intorno ad O, del pendolo G, la nota formola:

$$(3) \quad T(\sigma) = \frac{\pi}{2 \sqrt{g f_0 \zeta_0}}. \quad (1)$$

Se nelle (1) è $n = 2$, riesce $\gamma_0 = f_0 \zeta_0 = 0$. Potranno allora verificarsi i seguenti due casi:

$$\begin{array}{lll} 1^\circ & f_0 = 0 & , \quad f'_0 = 0 & , \quad f''_0 \zeta_0 > 0, \\ 2^\circ & \zeta_0 = 0 & , \quad \tau_0 = 0 & , \quad \tau'_0 f_0 \neq 0; \end{array}$$

e, per un approssimato valore della durata delle piccole semioscillazioni intorno ad O del pendolo G, si trova, nel primo caso, la formola

$$T(\sigma) = \frac{2 \sqrt{3}}{\sigma \sqrt{g f''_0 \zeta_0}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}},$$

e nel secondo l'altra

$$T(\sigma) = \frac{2 \sqrt{3}}{\sigma \sqrt{g |\tau'_0| f_0}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}}.$$

(1) Cfr. P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle* [t. I, p. 445 della 4ª edizione]. Quivi si giunge alla (3) con un procedimento che, pur valendo nel solo caso particolare $n = 1$, riesce forse meno semplice.

Meccanica. — *Una estensione delle formule del Blasius.* Nota di ARNALDO MASOTTI, presentata dal Corrisp. CISOTTI.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astrofisica. — *I reticoli zonalì come interferometri obbiettivi.* Nota del Prof. VASCO RONCHI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO ⁽²⁾.

In una recente Memoria ⁽³⁾ dal titolo « L'interferometro oculare e l'interferometro obbiettivo nella risoluzione delle stelle doppie » siamo giunti alle conclusioni seguenti:

che un reticolo circolare a frequenza costante è capace di formare l'immagine di una stella nel senso comune della parola, per quanto contornata da un complesso di anelli;

che questa immagine è perfettamente acromatica, cioè la sua larghezza è indipendente dalla lunghezza d'onda luminosa λ ;

che l'immagine stessa si forma in tutti i punti di un segmento con un estremo nel centro del reticolo, e di lunghezza funzione del diametro D di questo e di λ .

Abbiamo allora studiato due modi di usare un reticolo circolare nella risoluzione delle stelle doppie, sia considerandolo come obbiettivo e esaminando le immagini delle stelle nel modo comune, sia considerandolo come interferometro ed esaminando particolari frangie di combinazione iperboliche; e abbiamo trovato che il potere risolutivo in entrambi gli usi è uguale a $2D/\lambda$, cioè 2.44 volte maggiore di quello di un obbiettivo perfetto di uguale diametro.

Infine abbiamo concluso che il limite $2D/\lambda$ va considerato come un limite naturale, insuperabile finchè non si possa ricorrere a fenomeni nuovi, ma d'altronde raggiungibile con molteplici dispositivi; che tutti questi debbono però essere *interferenziali* e tutti meno luminosi di quelli ordinari, quasi che il voler concentrare maggior quantità di energia luminosa da un certo punto in poi voglia dire ridurre la possibilità di vedere i dettagli degli oggetti.

(1) Nella seduta del 21 marzo 1926.

(2) Lavoro eseguito nel R. Istituto di Fisica della R. Università di Firenze, Arcetri.

(3) V. RONCHI, « Mem. della R. Acc. Naz. dei Lincei », 1926.

Un altro tipo di reticoli circolari capaci di dare immagini, quelli *zonali*, è stato studiato, molto tempo fa, da J. L. Soret⁽¹⁾, A. Cornu⁽²⁾ e R. W. Wood⁽³⁾, i quali però si sono occupati soltanto della costruzione dei reticoli e delle loro proprietà geometriche e fotometriche sull'asse. Nella nostra Memoria li abbiamo appena citati, riservandoci di parlarne per disteso in seguito; e in questa Nota appunto ne studieremo le proprietà ottiche da un punto di vista più generale, seguendo lo stesso criterio adottato per i reticoli a frequenza costante.

Funzionamento dei reticoli zonali. — Si chiamano così i reticoli circolari piani in cui il k^o tratto ha il raggio

$$(1) \quad y_k = \rho \sqrt{k}.$$

ρ è il raggio del primo tratto e costituisce un parametro che individua completamente un reticolo⁽⁴⁾. Seguono la stessa legge i raggi degli anelli di Newton tra una superficie piana e una sferica.

Per la costruzione di questi reticoli non abbiamo nulla da aggiungere a quanto hanno pubblicato gli A. citati, in particolare R. W. Wood.

Dal momento, che il periodo decresce dal centro alla periferia, i vari elementi di un'onda piana incidente su un reticolo zonale ad essa parallelo vengono scomposti in onde diffratte con legge diversa. Infatti per periodo a_k del tratto k^o si può prendere la media delle larghezze di due tratti successivi

$$a_k = \frac{1}{2} (y_{k+1} - y_k + y_k - y_{k-1}) = \rho/2 \sqrt{k},$$

e perciò un elemento dell'onda piana incidente sul tratto k^o viene scomposto in vari elementi d'onda di cui il c^o è inclinato su quello diretto ($c = 0$) dell'angolo

$$\beta_{c,\lambda} = c \lambda / a_k = 2 c \lambda \sqrt{k} / \rho.$$

Questo elemento di onda diffratta taglia l'asse del reticolo alla distanza $f_{c,\lambda}$ dal suo centro, data da

$$(2) \quad f_{c,\lambda} = \rho^2 / 2c \lambda.$$

(1) J. L. SORET, « Arch. de Sc. Phys. et Nat. », LII, p. 320, 1875; « Ann. der Phys. u. Ch. », CLVI, p. 99, 1875.

(2) A. CORNU, « Compt. Ren. », LXXX, p. 645, 1875; « Ann. der Phys. u. Ch. », CLVI, p. 114, 1875.

(3) R. W. WOOD, « Phil. Mag. », XLV, p. 511, 1898; « Optique Physique », Gauthier-Villard, Paris, 1913.

(4) Le nostre notazioni differiscono alquanto da quelle degli A. citati, perchè noi chiamiamo *tratto* l'insieme di un anello chiaro e di uno scuro consecutivi.

Dunque per aperture non molto grandi tutti gli elementi diffratti dello stesso ordine c incontrano l'asse nello stesso punto. In altri termini un reticolo zonale trasforma l'onda piana incidente in un complesso di onde diffratte sferiche, i cui centri F_c (fuochi) sono sull'asse e distano di $f_{c,\lambda}$ dal centro O del reticolo (fig. 1). Siccome c può essere positivo e negativo, si hanno fuochi reali e virtuali.

A volte, per particolare struttura dei tratti del reticolo, alcune onde possono mancare o essere debolissime.

La (2) contiene tutte le proprietà geometriche dei reticoli zonal: $f_{c,\lambda}$, per uno stesso λ , al crescere di c decresce come gli inversi dei numeri interi; per c costante, decresce, se λ varia dal violetto al rosso, passando da 1 a $1/2$. L'aberrazione cromatica è dunque veramente enorme.

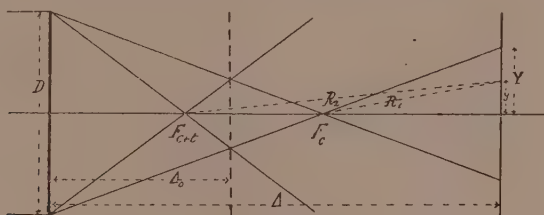


Fig. 1.

Ora in generale, due onde sferiche coerenti di raggio R_1 e R_2 in un piano normale alla congiungente i centri formano un sistema di frangie analogo agli anelli di Newton; infatti ponendo uguale a $k\lambda$ la differenza δ dei cammini ottici fra un punto di questo piano distante di y dall'asse e i centri delle due onde,

$$\delta = R_1 - R_2 + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

si ha

$$y^2 = [2k\lambda - (R_1 + R_2)] / \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Per brevità chiameremo newtoniano ogni sistema di frangie i cui raggi seguono una legge del tipo (1).

Allora in un piano qualunque normale all'asse di un reticolo zonale si hanno tanti sistemi newtoniani di frangie, centrati, quante sono le combinazioni due a due delle onde diffratte dal reticolo stesso. Infatti in questo caso, poichè la concordanza di fase si ha per tutte le onde sul piano del reticolo anzichè nei rispettivi centri, la formula precedente si semplifica in

$$y^2 = 2k\lambda / \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Definito il piano di osservazione colla sua distanza Δ dal reticolo, per l'interferenza delle onde d'ordine c e $c + t$, si ha $R_1 = \Delta - f_c, \lambda = \Delta - \rho^2/2c\lambda$
 $R_2 = \Delta - f_{c+t}, \lambda = \Delta - \rho^2/2(c+t)\lambda$ e quindi

$$(3) \quad y^2 = k \left\{ \frac{4\lambda^2 \Delta^2 c(c+t)}{\rho^2} - \frac{2\lambda \Delta}{t} + \frac{\rho^2}{t} \right\}.$$

La dipendenza di y da λ fa sì che in luce bianca non si possa distinguere nessuno dei vari sistemi di frangie sullo sfondo uniforme. In luce monocromatica i vari sistemi danno luogo a frangie di combinazione, pure circolari e concentriche; in generale però le varie onde hanno intensità diversa e ve ne è qualcuna predominante.

Se il piano di osservazione è il piano del reticolo ($\Delta = 0$) e se poniamo $t = 1$, si ritrova la (1); dunque il reticolo coincide con tutti i sistemi newtoniani di frangie fra tutte le coppie di onde diffratte consecutive; ed ecco perchè lo si vede così.

Potere risolutivo visuale di un reticolo zonale. — Ogni onda diffratta di ordine c si concentra nel suo centro a distanza $f_c, \lambda = \rho^2/2c\lambda$ dal reticolo sull'asse. Però trattandosi di onde sferiche di apertura angolare limitata, in un piano normale all'asse e passante per questo centro formano una figura di diffrazione costituita dal comune dischetto contornato da anelli, essendo questo l'effetto di un'onda sferica qualunque e in qualunque modo generata. Utilizzando queste immagini, si ha, senz'altro, il potere risolutivo di un obbiettivo ordinario: $D/1,22\lambda$.

In luce monocromatica, nel piano di osservazione distante di $\Delta = f_c, \lambda = \rho^2/2c\lambda$ dal reticolo si vede sull'asse la figurina di diffrazione intensa e intorno si vedono i complessi dei vari sistemi newtoniani di frange circolari e coi centri sull'asse.

In luce bianca l'effetto cromatico supera di gran lunga tutti gli altri: se Δ corrisponde a $\lambda = 7 \cdot 10^{-5}$ cm. si vede sopra uno sfondo biancastro un massimo di luce rossa sull'asse, contornato da una aureola verde-violetta; se invece Δ corrisponde a $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ cm. le posizioni dei colori sono invertite. Il potere risolutivo ne risulta fortemente diminuito. Dunque da questo punto di vista, i reticoli zionali non presentano alcun vantaggio sulle lenti, mentre hanno gli svantaggi della fortissima aberrazione cromatica e dello sfondo luminoso del campo.

Frangie di combinazione fra sistemi newtoniani. — Quando si sovrappongono due reticoli zionali, i cui parametri sono σ e σ' , si formano delle frangie di combinazione che sono circolari e concentriche coi reticoli stessi se questi sono centrati fra loro. Se invece i centri distano di un tratto $2g$, le frangie di combinazione sono ancora circolari e concentriche, e il raggio y_b della frangia h^a è dato da

$$y_b = \frac{\sigma^2 \sigma'^2}{\sigma^2 - \sigma'^2} h + 4g \frac{\sigma^2 \sigma'^2}{(\sigma^2 - \sigma'^2)^2},$$

ma il centro del sistema, pur essendo sulla retta che passa per i centri dei reticoli dati, dista dal punto di mezzo della loro congiungente di $-g \frac{\sigma^2 + \sigma'^2}{\sigma^2 - \sigma'^2}$.
Si giunge a queste formule eliminando k dalle due equazioni

$$(x - g)^2 + y^2 = \sigma^2 k, \quad (x + g)^2 + y^2 = \sigma'^2 (k + h)$$

che rappresentano i reticoli dati rispetto a una coppia di assi ortogonali coll'origine nel punto di mezzo fra i due centri e coll'asse delle x passante per questi.

Se $\sigma = \sigma'$, eliminando k fra le equazioni stesse si ottiene

$$x = h \sigma^2 / 4g,$$

cioè un complesso di frangie rettilinee, parallele all'asse delle y e equidistanti con periodo $\sigma^2 / 4g$.

Sia Y il raggio dell'ultimo anello dei reticoli; la prima frangia di combinazione ($h = 1$) è tangente all'orlo del reticolo quando

$$(4) \quad x = Y = \sigma^2 / 4g_m \quad g_m = \sigma^2 / 4Y,$$

avendo indicato con g_m quel particolare valore di g per cui questo avviene. Per valori di g inferiori a questo, non si può decidere, osservando le frangie di combinazione, se i due reticoli sono scenterati o no.

Tutte queste regole valgono anche se i due reticoli sono costituiti da sistemi newtoniani di frangie.

Potere risolutivo interferometrico dei reticoli zonali. - Dato che in un qualunque piano normale all'asse di un reticolo zonale, quando la sorgente è una stella monocromatica, si formano varii sistemi newtoniani di frangie, quando la sorgente è una stella doppia ciascuna componente dà luogo a un complesso di questi sistemi di frangie e fra questi due complessi si debbono formare delle frangie di combinazione rettilinee, equidistanti e normali alla congiungente le componenti stesse. Seguendo il medesimo concetto usato coi reticoli a frequenza costante, vediamo quale è la minima distanza angolare Γ risolubile mediante l'esame di queste frangie. In generale, essendo γ la distanza angolare delle componenti della doppia, i centri dei due sistemi newtoniani che si considerano, nel piano parallelo al reticolo e distante di Δ da questo, distano di

$$g = \gamma \Delta$$

e γ deve essere sostituito col minimo Γ quando g è ridotto al minimo della (4)

$$\Gamma \Delta = \sigma^2 / 4Y$$

dove σ è il parametro comune dei sistemi newtoniani che si sovrappongono, e Y il loro raggio. Ora σ , per la (3), è data da

$$\sigma^2 = 4 \frac{\lambda^2 \Delta^2 c(c+t)}{p^2} - \frac{2 \lambda \Delta (2c+t)}{t} + \frac{p^2}{t}$$

e Y va calcolato in funzione di Δ ; e sulla guida della fig. 1, si trova subito che nel piano di osservazione le due onde, che interferendo danno luogo al sistema newtoniano di frangie in esame, hanno diverso campo; ma evidentemente le frangie si formano soltanto nel campo comune; e allora a partire da un valore Δ_0 , per cui i campi coincidono, dato da

$$\Delta_0 = p^2 / (2c+t) \lambda \quad (p = \text{parametro del ret. zon.})$$

per $\Delta < \Delta_0$ bisogna tener conto dell'apertura dell'onda di ordine più elevato, e

$$Y = \{ 2(c+t) \lambda \Delta - p^2 \} D / 2 p^2$$

mentre per $\Delta > \Delta_0$ si deve tener conto dell'onda di ordine inferiore, e

$$Y = \{ 2c \lambda \Delta - p^2 \} D / 2 p^2.$$

Con ciò si hanno le due espressioni di Γ , nel secondo e nel primo caso

$$\Gamma = \frac{4 \lambda^2 \Delta^2 c(c+t) - 2 \lambda \Delta p^2 (2c+t) + p^4}{4 D \Delta t (2(c+t) \lambda \Delta - p^2)} \quad (\Delta > \Delta_0),$$

$$\Gamma = \frac{4 \lambda^2 \Delta^2 c(c+t) - 2 \lambda \Delta p^2 (2c+t) + p^4}{4 D \Delta t (2c \lambda \Delta - p^2)} \quad (\Delta < \Delta_0):$$

Ma entrambe queste espressioni diminuiscono in valore assoluto, per Δ tendente a Δ_0 , e prendono lo stesso valore per $\Delta = \Delta_0$.

In questo caso si ha il minimo valore di Γ percettibile con questo mezzo. Sostituendo e semplificando risulta

$$\Gamma = \lambda / 2 D.$$

Dunque, qualunque coppia di onde diffratte venga osservata, il potere risolutivo interferometrico è quello stesso dei reticoli a frequenza costante: $2 D / \lambda$.

Esperienze. - Di tutto questo è stato fatto un accurato controllo sperimentale. Ringrazio vivamente il prof. G. Abetti, Direttore del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, di avermi consegnato due reticoli zionali di $p = 0.09$ cm. e di $D = 2$ cm., su gelatina a fase invertita⁽¹⁾ che mi hanno permesso di confermare completamente le conclusioni dei calcoli. La stella

(1) R. W. WOOD, loc. cit.

doppia era costituita da due forellini di cm. 0,022 di diametro e coi centri distanti di cm. 0,046, e illuminati in luce monocromatica o di una lampada a mercurio o di un monocromatore Hilger e in luce bianca; il reticolo poteva essere portato fino a 45 m. dalla sorgente. Le nostre prove però si sono svolte quasi tutte diaframmando il reticolo fino a $D = 0,6$ e tenendolo a circa 10 m. dalla sorgente.

Esaminando il centro delle onde sferiche, non solo abbiamo verificato la presenza del disco di diffrazione, cogli anelli, ma abbiamo ancora riprovato che togliendo con un diaframma la parte parassiale dell'onda gli anelli si sviluppano a spese dell'immagine centrale, e il potere risolutivo può essere portato a $2 D/\lambda$ esaminando le frangie di combinazione iperboliche fra gli anelli, come si è dimostrato per le lenti nella nostra Memoria citata. S'intende però sempre in luce monocromatica.

Quanto all'esame delle frangie di combinazione fra sistemi newtoniani di frangie d'interferenza, con tutto il reticolo zonale libero non è possibile farlo, anche in luce monocromatica, per l'eccessiva sovrapposizione dei vari sistemi, in generale di frequenza diversa. Le misure si sono eseguite abbastanza bene togliendo ancora la parte centrale del reticolo con un diaframma, che nel nostro caso era di 0,4 cm. Le frangie venivano osservate con un forte oculare, perchè erano abbastanza sottili.

Conclusione. — I reticoli zonalì sono nettamente distinti dai reticoli circolari a frequenza costante, anche se gli uni e gli altri vengono ridotti a una sola corona rigata. E questo perchè i primi danno onde diffratte sferiche, danno immagini in piani definiti, hanno una forte aberrazione cromatica, e hanno un potere risolutivo visuale identico a quello delle lenti; mentre i secondi danno immagini lungo tutto un segmento, sono perfettamente acromatici, e hanno il potere risolutivo visuale uguale a quello interferometrico. Il quale se nei reticoli zonalì si raggiunge coll'esame di frangie rettilinee di combinazione, dipendenti da Δ e da λ , in modo da non poter essere osservate in luce bianca, coi reticoli a frequenza costante si ottiene coll'esame di frangie di combinazione iperboliche e acromatiche, sia perchè hanno luogo fra frangie d'ombra acromatiche, sia perchè la loro posizione è indipendente da Δ .

In compenso i reticoli zonalì, visualmente, sono più luminosi di quelli a frequenza costante. Ma anche questo conferma le nostre induzioni della Memoria precedente: se si vuol raggiungere il potere risolutivo interferometrico bisogna ricorrere a fenomeni d'interferenza, che richiedono l'uso dei soli raggi periferici del sistema ottico obbiettivo. Volendo raccogliere tutta l'energia luminosa che attraversa questo, intervengono fenomeni di diffrazione, e il potere risolutivo è ridotto almeno alla metà.

Il fatto che il potere risolutivo dei reticoli zonalì è ancora $2 D/\lambda$ costituisce un nuovo argomento a conforto della induzione che questo sia un limite naturale, insuperabile finchè non si possa ricorrere a fenomeni nuovi.

Fisica. — *Sulla trasmissione di calore per irradiazione.* Nota di U. BORDONI, presentata dal Socio CORBINO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *La polarizzazione rotatoria magnetica in campo alternato.* Nota di E. PERSICO, presentata dal Socio CORBINO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Potenziali di ionizzazione di alcuni elementi del gruppo delle terre rare*⁽¹⁾. Nota di LUIGI ROLLA e di GIORGIO PICCARDI, presentata⁽²⁾ dal Socio GARBASSO.

Per estendere lo studio dei potenziali di ionizzazione col metodo della fiamma altrove descritto⁽³⁾, agli elementi che formano dei sali e degli ossidi poco volatili, abbiamo dovuto innalzare la temperatura alla quale vengono condotte le esperienze, assai al disopra di quella della fiamma dell'ordinario bruciatore di Bunsen.

Naturalmente abbiamo dovuto anche usare un materiale che permettesse di operare a tale elevata temperatura, senza trasformare nella sua parte essenziale il dispositivo sperimentale già adottato onde ottenere dei risultati in certo modo confrontabili con quelli già ottenuti in altre condizioni.

In queste nuove esperienze, per raggiungere una temperatura più alta, è stato sostituito al bruciatore di Bunsen una piccola soffieria alimentata con gas ed ossigeno. Regolando opportunamente la pressione del gas e quella dell'ossigeno (facilitando per quest'ultimo la regolazione con l'uso di due camere di compressione del volume complessivo di circa 70 litri) e controllando in continuità mediante un manometro ad acqua la pressione del gas e mediante un manometro a mercurio quella dell'ossigeno, siamo giunti ad ottenere una fiamma di temperatura e di condizioni aereodinamiche praticamente costanti.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica fisica della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 7 marzo 1926.

(3) «Rendiconti Lincei», vol. II, serie 6^a, fasc. 1^o e 2^o, luglio 1925; 3^o e 4^o, agosto 1925; 5^o e 6^o, settembre 1925; 9^o, novembre 1925.

La temperatura della fiamma ottenuta si può ritenere che si aggiri intorno ai 2300° C., ossia intorno al punto di fusione dell'Iridio.

Alla rete di sottile filo di Platino che si sarebbe fusa immediatamente in una tale fiamma, è stata sostituita una griglia formata da una serie di sbarrette di Iridio puro (Hereaus), a sezione quadrata di 0.6 mm. di lato, disposte parallelamente fra loro alla distanza di circa 3 mm., chiuse ad una estremità in una massiccia morsa di ottone, munita di manico (pure in ottone) terminante con un serrafilo.

Alla laminetta di Platino è stata sostituita una grossa capsula di Platino, del diametro di circa 7 cm., a fondo piatto e munita di flangia. La flangia è stata stretta fra due grossi anelli di ottone, uno dei quali è stato munito di manico terminante con un serrafilo.

Il raffreddamento per conduzione è tale, che il punto della capsula colpito dal dardo della fiamma non oltrepassa il giallo molto chiaro. Le sbarrette di Iridio, invece, vengono portate dalla fiamma al bianco abbagliante. In tal modo viene creata nella fiamma la dissimmetria necessaria per l'andamento della esperienza.

Fra capsula e griglia è stato inserito il galvanometro usato nelle passate esperienze, che anche in questo caso funziona da perfetto amperometro, dato che la sua resistenza interna è trascurabile rispetto alla resistenza interna della fiamma. (Il galvanometro è di tipo D'Arsonval, di 160 ohm di resistenza interna, a 2 m. di distanza dà una deviazione di 1 cm. per una corrente di $2.475 \cdot 10^{-7}$ amp.).

A seconda dei sali introdotti nella fiamma si sono dovuti usare diversi shunt, in modo che le deviazioni del galvanometro si potessero considerare, per la loro relativa piccolezza, come proporzionali agli angoli di rotazione dello specchio.

Operando in queste nuove condizioni, abbiamo dovuto ricostruire la retta che dà $\text{Log. } K$ (K = costante di equilibrio della reazione:

Atomo neutro \rightleftharpoons Ione + Elettrone) in funzione di V (V = potenziale di ionizzazione espresso in Volta), determinando la costante K di equilibrio per due elementi di potenziale ben noto: il Sodio ed il Calcio.

Come media di varie esperienze, del resto tutte molto concordanti, abbiamo ottenuto:

	K	$\text{Log } K$	V
Na	$2.53 \cdot 10^{13}$	13.403	5.13
Ca	$3.15 \cdot 10^{11}$	11.498	6.09

Il coefficiente angolare della retta calcolato da questi dati sperimentali è:

$$\text{tag } \alpha = - \frac{13.403 - 11.498}{6.09 - 5.13} = - 1.98;$$

quello calcolato per la temperatura di 2300° C. è:

$$\operatorname{tag} \alpha = - \frac{23052}{4.571 \cdot (2300 + 273)} = - 1.96.$$

L'accordo è ottimo.

Abbiamo applicato questo metodo alla serie particolare degli elementi delle terre rare. Malgrado lo speciale interesse che presentano, sia per le ricerche astrofisiche, sia per la teoria della costituzione degli atomi, i potenziali di ionizzazione di questi elementi sono rimasti fino ad oggi completamente sconosciuti.

Le esperienze con questi elementi, che formano ossidi così refrattari, si presentano di una grande difficoltà ed occorre una lunga pratica per riuscire a condurle in modo completamente soddisfacente. Questi ossidi nella fiamma dell'esperienza non subiscono sovente che un principio di agglomerazione ed una parte dell'ossido pulverulento può essere trascinato via dalla impetuosa corrente gassosa della fiamma stessa.

In tal caso, essi vanno vetrificati completamente ad una temperatura ancor più alta di quella dell'esperienza, ciò che non sempre è possibile poichè in qualche caso abbiamo visto fondere la sbarretta di Iridio che sostiene la perla, senza che l'ossido presentasse nemmeno un principio di fusione.

Talvolta, l'ossido vetrificato non volatilizza che in quantità così piccola (assolutamente inapprezzabile anche alla microbilancia) da non produrre alcuna corrente distinguibile con sicurezza da quella prodotta dalla fiamma sola. In tali casi siamo al limite della sensibilità del metodo nelle condizioni di temperatura sopra accennate.

Abbiamo sperimentato sopra gli ossidi assolutamente puri, ottenuti per altre ricerche nel nostro Laboratorio, di Lantanio, di Cerio, di Praseodimio e di Neodimio. Dobbiamo alla cortesia del prof. Hevesy di Copenhagen l'aver potuto esaminare la fiamma di sali puri di Samario ⁽¹⁾.

I risultati sono riuniti nella seguente tabella e rappresentano la media di molte misure (fino a 29 per ciascun elemento) tutte concordanti.

(1) Il prof. Hevesy, al quale vogliamo esprimere i nostri vivi ringraziamenti, ebbe la cortesia d'inviarci anche solfati otto-idrati ed ossidi di Gd, Dy, Er, Tb, Yb. Su questi elementi stiamo ancora sperimentando per poter arrivare a risultati sicuri, ma per l'estrema difficoltà di volatilizzare gli ossidi l'esperienza risulta particolarmente difficile. Ci riserviamo di riferire in proposito in una prossima Nota.

Elemento	Ossido	Perdita in peso per secondo	Corrente media	Atomi per secondo	Elettroni per secondo	K	Log K	V
La	La ₂ O ₃	2.05.10 ⁻⁶	123.68	8.10.10 ¹⁵	1.93.10 ¹³	4.60.10 ¹²	12.662	5.49
Ce	CeO ₂	5.53.10 ⁻⁶	7.61	1.92.10 ¹⁶	1.18.10 ¹³	7.35.10 ⁹	9.866	6.91
Pr	Pr ₄ O ₇	2.34.10 ⁻⁶	72.25	8.38.10 ¹⁵	1.12.10 ¹⁴	1.51.10 ¹²	12.178	5.76
Nd	Nd ₂ O ₃	1.26.10 ⁻⁶	15.88	4.50.10 ¹⁵	2.48.10 ¹³	1.36.10 ¹¹	11.133	6.31
Sa	Sa ₂ O ₃	1.23.10 ⁻⁶	8.07	4.23.10 ¹⁵	1.26.10 ¹³	3.77.10 ¹⁰	10.576	6.55

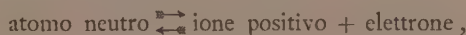
Pel calcolo del numero degli atomi, abbiamo ammesso che l'ossido volatilizzato sia completamente dissociato in metallo ed ossigeno e che tale vapore sia monoatomico alla temperatura di 2300° C. ed alle condizioni di estrema rarefazione in cui si trova nella fiamma.

Che questa ipotesi sia senz'altro ammissibile e sembri rispondente alla realtà, è dimostrato dal fatto che le fiamme studiate emettono uno spettro di righe. D'altronde, considerazioni di carattere generale che portano ad una conferma sperimentale della teoria di Bohr e delle considerazioni di Hevesy ⁽¹⁾ e di Stackelberg ⁽²⁾ sulla struttura degli atomi degli elementi delle terre rare, fanno ritenere che i valori trovati da noi siano quelli invano cercati con altri metodi.

La teoria relativa sarà svolta in una prossima pubblicazione.

Chimica-fisica. — *Affinità dell'atomo di iodio per l'elettrone* ⁽³⁾.
Nota di GIORGIO PICCARDI, presentata ⁽⁴⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Il metodo della fiamma, altrove descritto ⁽⁵⁾, è stato immaginato per la determinazione sperimentale della reazione:



onde risalire dal valore di tale costante al valore del potenziale di ionizzazione.

Se un atomo neutro ha affinità per l'elettrone ed avviene la reazione:



(1) G. V. HEVESY, « Z. S. anorg. Chemie », 147, 1-3, 217, 1925.

(2) M. V. STACKELBERG, « Z. S. phys. Chemie », 118, 5-6, 342, 1925.

(3) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica fisica della R. Università di Firenze.

(4) Nella seduta del 7 marzo 1926.

(5) Questi « Rendiconti », vol. II, serie VI, 2° sem., fascicoli 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 9, 1925.

il metodo sarà ancora applicabile, solamente dovremo registrare, invece di un aumento, una diminuzione di corrente.

Con un calcolo del tutto analogo a quello seguito per la determinazione del potenziale di ionizzazione, si può giungere senz'altro al valore dell'affinità dell'atomo neutro per l'elettrone.

Volendo operare col metodo di confronto, ciò che è preferibile, basta sostituire alla retta che dà $\log K$ in funzione di V (K costante di equilibrio, V potenziale di ionizzazione), una retta uscente dall'origine degli assi, ma di coefficiente angolare eguale e di segno contrario, dato che in questo caso $\log K$ è una funzione linearmente crescente di U (U affinità dell'atomo neutro per l'elettrone).

Noi possiamo quindi fissare, il coefficiente angolare di tale retta usando i valori di $\log K$ determinati per delle reazioni di ionizzazione, anzichè di affinità elettronica di atomi neutri.

Noi abbiamo condotto a termine varie esperienze sull'iodio, i cui atomi si prestano particolarmente bene per questo genere di ricerche, operando nelle stesse condizioni aereodinamiche e di temperatura nelle quali determinammo i potenziali di ionizzazione di alcuni elementi del gruppo delle terre rare ⁽¹⁾.

In quelle condizioni trovammo per la reazione di ionizzazione del sodio e del calcio i seguenti valori di $\log K$:

	K	$\log K$	V
Na	$2,53 \cdot 10^{13}$	13,403	5,13
Ca	$3,15 \cdot 10^{11}$	11,498	6,09

Il coefficiente della retta delle ionizzazioni era dunque:

$$\text{tag } \alpha = - \frac{13,403 - 11,498}{6,09 - 5,13} = - 1,98 ;$$

quindi il coefficiente angolare della retta delle affinità elettroniche, nelle stesse condizioni, dovrà essere: + 1,98.

Osserviamo subito che, dato l'alto potenziale di ionizzazione dell'iodio, (10 ~ 10,5), la reazione di ionizzazione $I^+ + \text{el.} \rightleftharpoons I$, non può disturbare la reazione di affinità $I + \text{el.} \rightleftharpoons I^-$, dato che essa non potrebbe dare in quelle condizioni che una corrente 100 più piccola dell'altra. Infatti dalla retta delle ionizzazioni si ricava per $\log K$ 2,774 ~ 3,764 mentre, vedremo in appresso, la reazione di affinità dà per $\log K$ un valore di 7,093.

Invece di inviare direttamente i vapori di iodio nella fiamma, cosa che avrebbe portato grandi difficoltà e gravi inconvenienti, per la determinazione

(1) Questi « Rendiconti ».

della perdita in peso, abbiamo fatto trascinare da una derivazione della corrente di ossigeno che alimenta la combustione, i vapori che si svolgono a temperatura da un liquido organico a basso punto di ebollizione: l'ioduro di metile.

Per questo scopo l'ioduro di metile è stato racchiuso in una ampollina di vetro attraverso la quale veniva fatto passare, senza gorgogliarvi, l'ossigeno. In questo modo si sono evitate le irregolarità di volatilizzazione e le possibilità di condensazioni di iodio solido in qualche parte dell'apparecchio. Essendo inoltre tale corrente gassosa perfettamente costante ed essendo pure praticamente costante, per la durata dell'esperienza, la temperatura dell'ambiente, la volatilizzazione è avvenuta in modo assolutamente perfetto, come ne fa fede la straordinaria concordanza dei risultati ottenuti.

I risultati sperimentali sono riuniti nella seguente tabella:

N.	perdita in peso per secondo	diminuzione corrente	atomi per secondo	elettroni per secondo	K
1	$1,78 \cdot 10^{-4}$	2,00	$8,74 \cdot 10^{17}$	$3,12 \cdot 10^{12}$	$1,11 \cdot 10^7$
2	$7,77 \cdot 10^{-4}$	4,20	$3,28 \cdot 10^{18}$	$6,24 \cdot 10^{12}$	$1,18 \cdot 10^7$
3	$5,16 \cdot 10^{-4}$	3,80	$2,18 \cdot 10^{18}$	$5,93 \cdot 10^{12}$	$1,59 \cdot 10^7$
4	$4,53 \cdot 10^{-4}$	3,20	$1,91 \cdot 10^{18}$	$4,99 \cdot 10^{12}$	$1,30 \cdot 10^7$
5	$4,47 \cdot 10^{-4}$	3,00	$1,89 \cdot 10^{18}$	$4,68 \cdot 10^{12}$	$1,16 \cdot 10^7$
6	$4,44 \cdot 10^{-4}$	3,00	$1,88 \cdot 10^{18}$	$4,68 \cdot 10^{12}$	$1,16 \cdot 10^7$

Valore medio di $K = 1,25 \cdot 10^7$, $\log K = 7,093$
da cui $U = 3,58$ volta.

Data l'alta temperatura della fiamma, circa 2300°C , è certo che tutte le molecole di iodio sono completamente dissociate in atomi, come pure è certo che è da escludere completamente la formazione di acido iodidrico, fra l'iodio e l'idrogeno liberi nella fiamma; nel calcolo del numero degli atomi, noi abbiamo perciò considerato tutto l'iodio introdotto nella fiamma come iodio atomico.

Dal valore espresso in volta si passa al valore dell'affinità espresso in calorie e si trova:

$$Q = U 23052 = 82000 \text{ cal. circa.}$$

Questo valore determinato direttamente è in ottimo accordo con altri valori determinati indirettamente mediante dei cicli energetici; Gerlach e Groman⁽¹⁾ trovarono infatti per tale affinità 82000 cal.; altri, secondo Born⁽²⁾, 81000 cal.

(1) GERLACH e GROMAN, « Zeits. f. Phys. », 18, 239, 1923.

(2) BORN, « Ber. deut. Phys. Ges. », 21, 679, 1919.

Dal valore di U si può ricavare la lunghezza d'onda del limite rosso dello spettro continuo che accompagna sempre l'unione di un elettrone con un atomo o con un ione positivo. Applicando la formula di Einstein si ha:

$$\lambda = \frac{12345}{3,58} = 3450$$

in coincidenza perfetta con la lunghezza d'onda misurata (Gerlach e Groman) nel caso dello spettro continuo dell'iodio.

Mineralogia. — *Sulla Bismutinite di St. Agnes (Cornovaglia).*
Nota ⁽¹⁾ della dott.ssa GIULIA LUGARO, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. ZAMBONINI.

Per le scarse cognizioni che si hanno sulla morfologia della bismutina, la quale, al contrario di quanto è dato osservare per l'antimonite, si presenta in natura assai raramente in cristalli misurabili, ho studiato con interesse un esemplare di questo minerale che con l'indicazione della provenienza di St. Agnes in Cornovaglia, fa parte della collezione di questo Istituto di mineralogia e che mi venne a tale scopo affidato dal prof. Quercigh.

Lo studio fu proficuo perchè servì a stabilire alcune forme non osservate finora nei cristalli di Cornovaglia e qualcuna anche nuova per il minerale.

Questo campione consta di numerosi e brillanti cristallini aciculari, talora riuniti in fascetti, ma spesso unici, su bismutinite compatta ed alquanto alterata per ossidazione (che appare di evidente formazione anteriore), ed accompagnata da calcopirite e da quarzo.

Gli individui allungatissimi secondo ζ non permettono di definire alcuna faccetta terminale, mentre la zona verticale, benchè abbia sezione molto piccola, offre la possibilità di ottenere buone immagini dalle varie faccette, (per lo più ben riflettenti), specialmente se a tale scopo si perfeziona in modo opportuno il dispositivo d'osservazione goniometrica.

Questi cristallini, che possiedono tutte le proprietà fisiche e chimiche della bismutinite, permettono una sicura identificazione delle forme per l'esistenza della direzione principale di sfaldatura, la quale è unica sempre, si mette generalmente bene in evidenza nell'esecuzione stessa del distacco dei singoli individui dal campione e riesce facilmente reperibile.

Ciò permette di escludere sicuramente in questi cristalli l'esistenza di geminazioni, le quali richiederebbero una diversa discussione e valutazione

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Palermo, diretto dal prof. E. Quercigh.

(2) Nella seduta del 7 marzo 1926.

dei risultati goniometrici e la cui possibilità non si potrebbe *a priori* escludere, poichè, malgrado non risulti finora che si siano rinvenuti cristalli geminati nella bismutina, tale fatto si può ascrivere piuttosto alla scarshezza delle osservazioni, tanto più che nell'antimonite furono già osservate geminazioni secondo varie leggi.

La possibilità di ottenere, fra i numerosi individui esaminati, una quarantina di essi che danno buoni valori per l'angolo: $(110):(010)$, garantendo così l'attendibilità anche delle altre misure ricavate, rendono questi cristalli più interessanti di quanto forse, *a priori*, per causa della mancanza di facce terminali, si sarebbe potuto pensare.

Le forme osservate sono:

$\{100\}$, $\{010\}$, $\{410\}$, $\{310\}$, $\{210\}$, $\{320\}$, $\{110\}$, $\{450\}^*$, $\{340\}$, $\{230\}^*$, $\{250\}^*$, $\{130\}$, $\{140\}$.

I prismi sono rappresentati talvolta da tre od anche soltanto due facette lineari, ad eccezione di $\{110\}$ che è meno limitato.

Il primo pinacoide è raro, il secondo, invece, comunissimo, per quanto risulta dai cristalli esaminati, in cui non manca mai, come si vede dal seguente quadro delle combinazioni osservate su 42 individui:

1.	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{210\}$	(che compare tre volte)		
2.	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{410\}$	$\{340\}$	(due volte)	
3.	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{320\}$	$\{230\}$	$\{130\}$	(due volte)
4.	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{410\}$	$\{320\}$	$\{130\}$	(sette volte)
5.	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{320\}$	$\{340\}$	$\{230\}$	(sette volte)
6.	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{410\}$	$\{210\}$	$\{340\}$	$\{250\}$ (tre volte)
7.	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{210\}$	$\{320\}$	$\{250\}$	$\{140\}$ (cinque volte)
8.	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{210\}$	$\{320\}$	$\{450\}$	$\{140\}$ (quattro volte)
9.	$\{100\}$	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{210\}$	$\{340\}$	$\{230\}$ (quattro volte)
10.	$\{100\}$	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{340\}$	$\{130\}$	$\{140\}$ (tre volte)
11.	$\{010\}$	$\{110\}$	$\{310\}$	$\{210\}$	$\{450\}$	$\{130\}$ (due volte).

Il prisma $\{110\}$ è costante, i prismi $\{140\}$ e $\{410\}$, pure ben noti per la bismutina, sono frequenti.

Il prisma $\{310\}$ che fu già riscontrato per la specie nei cristalli di Bieber (Hessen)⁽¹⁾, è raro qui, comparendo in due soli individui.

Il prisma $\{210\}$, trovato dall'Artini⁽²⁾ nel minerale di Brosso ed in seguito dal Bianchi⁽³⁾ in quello di Crodo e dal Quercigh in quello di Bieber,

(1) E. QUERCIGH, *Sulla bismutinite*. « Rendic. R. Accad. Naz. Lincei », VI, 1 (1925) I, 33.

(2) E. ARTINI, *Bismutinite di Brosso*. « Rendic. R. Accad. Lincei », V, 24 (1915) II, 250.

(3) A. BIANCHI, *La bismutinite di Crodo in Val d'Ossola e le costanti cristallografiche della bismutinite*. « Rendic. R. Accad. Naz. Lincei », V, 33 (1924) II, 255.

è comune in questi cristalli, benchè spesso compaia con tre o due sole facciette, lo stesso dicasi del prisma 1320: pure noto per Crodo e Bieber.

Il prisma 1450: risulta nuovo per la specie e comparendo in sei cristalli con buone misure sembra accertato anche se in qualche caso possiede solo tre faccette.

Frequente è pure il prisma 1340: già noto per Brosso e Bieber.

I prismi 1230: e 1250: pure nuovi per la bismutinite, sono frequenti in questi cristallini. Posso notare che il Phillips⁽¹⁾ ebbe ad osservare sui cristalli di Fowey Consols e Lanescot (Cumberland) un prisma le cui facce avevano, rispetto a quelle di 1010:, una inclinazione di $23^{\circ} 25'$, dal che, con molta tolleranza, si poteva pensare al simbolo 1250: il quale, però, richiederebbe secondo il valore di $a:b = 0.985$ oramai ben stabilito per il minerale⁽²⁾, un angolo di $22^{\circ} 6'$, perciò Brooke e Miller⁽³⁾ non accolsero, ben a ragione, tale forma.

Ove la misura di Phillips fosse sicura ed indiscutibile, sarebbe forse da pensare al simbolo 1370: che avrebbe su 1010: una inclinazione di $23^{\circ} 31'$: tale forma non fu, però, osservata, finora, nemmeno per l'antimonite.

Il prisma 1130:, ben noto per il minerale, è frequente in questi cristalli; va ricordato che anche il Phillips osservò, nell'accennato materiale del Cumberland, un prisma le cui facce avevano una inclinazione di $17^{\circ} 35'$ su quelle di 1010: e che potrebbero essere considerate vicinali di 1130: ove il grado di attendibilità delle misure non permettesse di ammettere la forma 15.16.0:. L'ammissione di 1130: per quella località fu mantenuta da Brooke e Miller (l. c.).

L'ammissione di queste forme è basata sulle misure seguenti:

Angoli misurati	N	Limiti delle misure	Media	Valori calcolati	Diff.
010:410	26	$75^{\circ} . 47' - 76^{\circ} . 22'$	$76^{\circ} 5'$	$76^{\circ} 10'$	$- 5'$
010:310	7	$71 . 34 - 71 . 59$	$71 . 46$	$71 . 49$	$- 3$
010:210	35	$63 . 29 - 64 . 6$	$63 . 54$	$63 . 46$	$- 2$
010:320	40	$56 . 28 - 56 . 57$	$56 . 40$	$56 . 43$	$- 3$
010:110	60	$45 . 3 - 45 . 42$	$45 . 21$	$45 . 26$	$+ 5$
010:450	20	$38 . 34 - 39 . 16$	$38 . 56$	$39 . 5$	$- 9$
010:340	40	$37 . 11 - 37 . 34$	$37 . 25$	$37 . 17$	$+ 8$
010:230	6	$33 . 46 - 34 . 23$	$34 . 4$	$34 . 6$	$- 2$
010:250	25	$21 . 52 - 22 . 28$	$22 . 12$	$22 . 6$	$+ 6$
010:130	35	$18 . 30 - 19 . 7$	$18 . 50$	$18 . 42$	$+ 8$
010:140	30	$13 . 54 - 14 . 29$	$14 . 14$	$14 . 15$	$- 1$

(1) W. PHILLIPS, «Phil. Mag.», 2 (1827), 181.

(2) Che risulta dalla media delle tre migliori determinazioni fatte finora su cristalli naturali ed artificiali e cioè: ARTINI (0.98556), BIANCHI (0.9844), QUERCIGH (0.985).

(3) H. J. BROOKE and W. H. MILLER, *Intrad. Mem. by W. Phillips*, London (1852) 173.

Benchè il numero di 42 cristallini, che diedero misure attendibili, non sembri sufficientemente elevato per fare considerazioni d'indole generale, sarà opportuno confrontare la frequenza delle singole forme, la quale risulta:

forme:	100	010	410	310	210	320	110	450	340	230	250	130	140
%	17	100	29	5	50	60	100	14	45	31	19	33	29

Si rileva così che le forme {010} e {110}, rappresentate dalle faccette meno esili in questi cristalli, hanno la frequenza massima e ciò in accordo con la regola che le forme più sviluppate sono le più frequenti, regola verificata, come mostrò il Goldschmidt⁽¹⁾, per i cristalli di antiminite di Felsobánya e di Ichinokawa. Va rilevato, inoltre, che mentre in quelle antimoniti il prisma {320} ha una frequenza decisamente minore di {210}, in questa bismutinite accade il contrario.

Anche nei cristallini aciculari di Bieber, che assomigliano a questi di St. Agnes, si osserva che il prisma {110} le cui faccette sono, fra tutte, le più sviluppate, possiede la frequenza massima, ed è seguito dal II° pinacoide sia per la frequenza che per lo sviluppo, come si vede dalle percentuali che ho calcolato e che riporto nel seguente specchietto:

forme:	110	010	210	310	140	510	340	100	320
frequenza:	100	91	64	36	27	18	18	9	9

Anche per Bieber si verifica la spiccata frequenza di {210} mentre per le altre forme, se si eccettua il prisma {140} che ha quasi la stessa frequenza, esistono fra le due località differenze notevoli che si accentuano con la esistenza di forme particolari a ciascuna di esse.

Mineralogia. — *Nuove ricerche sulla baritina di Racalmuto in Sicilia.* Nota di CARMELA RUIZ, presentata dal Socio ZAMBONINI.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Osservazioni geologiche sull'Isola di Asinello e sugli scavi vicini (Carnaro).* Nota di GUSTAVO CUMIN, presentata dal Socio MILLOSEVICH.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) V. GOLDSCHMIDT, *Ueber di Grösse und Häufigkeit der Flächenarten.* «Beitr. z. Kryst. u. Min.», 2 (1923) 98.

Vulcanologia. — *Sopra due differenti diagrammi d'eruttività dei vulcani giapponesi.* Nota di F. STELLA STARRABBA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. DE LORENZO.

In una recente Nota ⁽²⁾, traendo partito da una serie di registrazioni di H. Tanakadate ⁽³⁾, riguardanti le manifestazioni di attività dei vulcani del Giappone nel decennio 1914-1924, ho preso in esame l'andamento dell'eruttività di quei vulcani entro il suddetto periodo.

Tale eruttività complessiva risente (come già era noto per il Vesuvio, individualmente considerato) l'influenza delle precipitazioni atmosferiche del paese; alla stagione delle piogge, che nel Giappone (in generale) presentano un massimo estivo, segue o si accompagna un aumento spiccato dell'eruttività. Il diagramma annuale dell'eruttività dei vulcani giapponesi, costruito in base alle 82 date desunte dalla citata rassegna di Tanakadate, è riprodotto nella fig. 1-A.

K. Sapper ⁽⁴⁾ sin dal 1917 aveva raccolto una serie di notizie sulle eruzioni dei vulcani giapponesi, fondandosi, principalmente, sulle ricerche di J. Milne ⁽⁵⁾ e di F. Omori ⁽⁶⁾; della numerosa serie sono 271, quelle per cui, accanto all'indicazione dell'anno, si ha anche quella del mese in cui scoppiarono. Oltre di queste 281 date circa un centinaio ancora ve n'è, che si riducono al solo millesimo.

Coll'aiuto dei risultati ai quali si è giunti studiando il materiale di Tanakadate è, forse, possibile una prima discussione del comportamento dei vulcani giapponesi, poggiandosi sulle notizie raccolte da Sapper. Distribuendo le 271 date complete di quest'autore per i dodici mesi dell'anno si ottengono i seguenti totali mensili:

G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
19	32	18	31	18	17	27	29	20	13	19	28

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1926.

(2) F. STELLA STARRABBA, *Sopra un probabile rapporto fra le precipitazioni atmosferiche e l'attività dei vulcani nel Giappone.* « Bull. volcanologique », 1925. (Con la bibliografia dei lavori di G. De Lorenzo e dello stesso A. sull'argomento).

(3) H. TANAKADATE, *The volcanic activity in Japan during 1914-1924*, « Bull. volcanologique », 1925, n. 3 et 4, p. 4.

(4) K. SAPPER, *Katalog der geschichtlichen Vulkanausbrüche*, Strassburg, 1917.

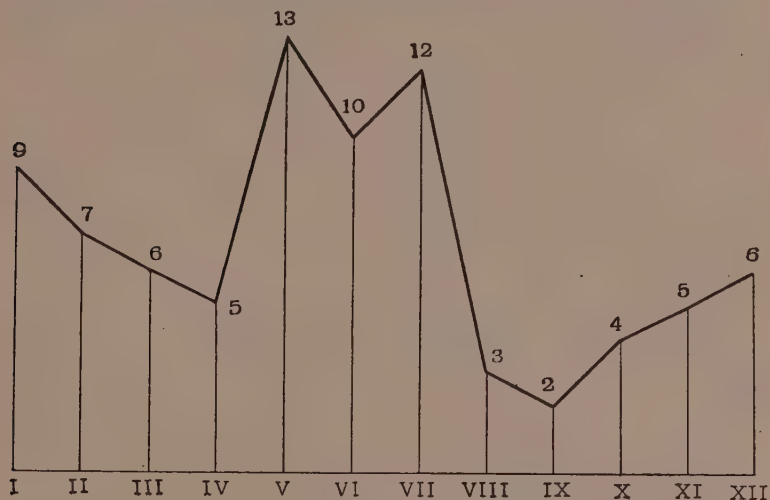
(5) J. MILNE, *The volcanoes of Japan* « Trans. seism. Soc. of Japan », IX (2), 1886.

(6) F. OMORI, « Bull. Imp. Earthq. Inv. Comm. », II (1), 1908, 28-33.

Le 82 date di Tanakadate sono, invece, così distribuite:

G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
9	7	6	5	13	10	12	3	2	4	5	6

Partendo da queste cifre si possono rappresentare graficamente i due tipi (alquanto diversi) d'eruttività annuale.



B

Fig. 1.

I diagrammi relativi si costruiscono innalzando su dodici punti equidistanti, presi sopra un asse orizzontale, corrispondenti ai 12 mesi dell'anno, altrettanti segmenti fra di loro paralleli, normali all'asse e di lunghezze proporzionali ai rispettivi numeri di registrazioni mensili; la spezzata che risulta unendo con segmenti, coppia a coppia, le estremità superiori di normali contigue, è la linea della eruttività annuale.

La fig. 1-B rappresenta, appunto, il diagramma costruito utilizzando le date di Sapper; in esso, però, le altezze stanno a quelle del precedente nella proporzione di 2:5.

Le linee di eruttività dell'uno e dell'altro diagramma, accanto a rilevanti differenze, presentano — nondimeno — spiccate analogie.

Mentre nella fig. 1-A la linea è caratterizzata da due soli massimi: uno secondario, invernale (gennaio), ed uno più marcato nel trimestre maggio-luglio, la linea della fig. 1-B presenta, invece, tre massimi rispettivamente in dicembre, febbraio, aprile ed un altro — con caratteri di maggiore persistenza — nei mesi di luglio ed agosto.

Un tratto d'analogia può riconoscersi nell'esistenza — in ambedue i diagrammi — d'un rilevante massimo estivo, che è simultaneo o susseguente ad un periodo di intense precipitazioni atmosferiche; cioè: al periodo delle piogge di primavera-estate, che danno un'impronta caratteristica al clima giapponese.

Le parziali discordanze fra le due linee d'eruttività possono mettersi in relazione con diverse circostanze. Bisogna riconoscere che:

1) mentre le 82 registrazioni di Tanakadate si riferiscono a 12 vulcani, i dati di Sapper ne interessano un numero quasi doppio (25); viene a mutare, così, il rapporto fra il numero di vulcani che sottostanno a regimi di precipitazioni non perfettamente simili.

2) Le date che riporta Sapper sono già abbastanza numerose a datare dall'ottavo secolo dell'era nostra. Posto che (come fa osservare lo stesso autore) la civilizzazione del Giappone procedette gradatamente dal Sud al Nord, nella serie di date prevalgono quelle di eruzioni dei vulcani meridionali.

3) Le registrazioni di Tanakadate costituiscono una serie continua e, dentro certi limiti, completa delle manifestazioni del vulcanismo giapponese nel decennio 1914-1924 ed offrono speciale interesse per il vulcanologo. Sapper, invece, elenca una numerosa serie di registrazioni saltuarie circa eruzioni che, volta a volta, assunsero singolare importanza o per la loro veemenza o per aver coinciso con speciali circostanze della vita di quel popolo, per le quali il loro ricordo più facilmente potè passare alla storia.

4) Molte date d'eruzioni antiche, poi, ci sono pervenute senza l'indicazione del mese; il numero delle date così monche sta a quello delle complete quasi come 1:3. Le deduzioni statistiche, che si appoggiano a questi dati, possono accostarsi alla verità solo con una larga approssima-

zione. Comunque, la crisi d'eruttività, che nel diagramma della fig. 1-A si afferma nei mesi di maggio, giugno e luglio, trova pieno riscontro in quella di luglio, agosto e settembre del diagramma della fig. 1-B. Ossia, per le eruzioni di Sapper la crisi medesima avrebbe avuto luogo con un ritardo di 2 o 3 mesi rispetto alle precedenti.

Poichè nell'uno e nell'altro caso è indiscutibile l'esistenza d'un nesso tra il periodo delle piogge primaverili-estive e l'aumentata eruttività estiva; poichè, ancora, la frequenza di tali nessi ⁽¹⁾ non può lasciar dubbio circa la relazione di causa ed effetto che — entro certi limiti — corre tra le pre-

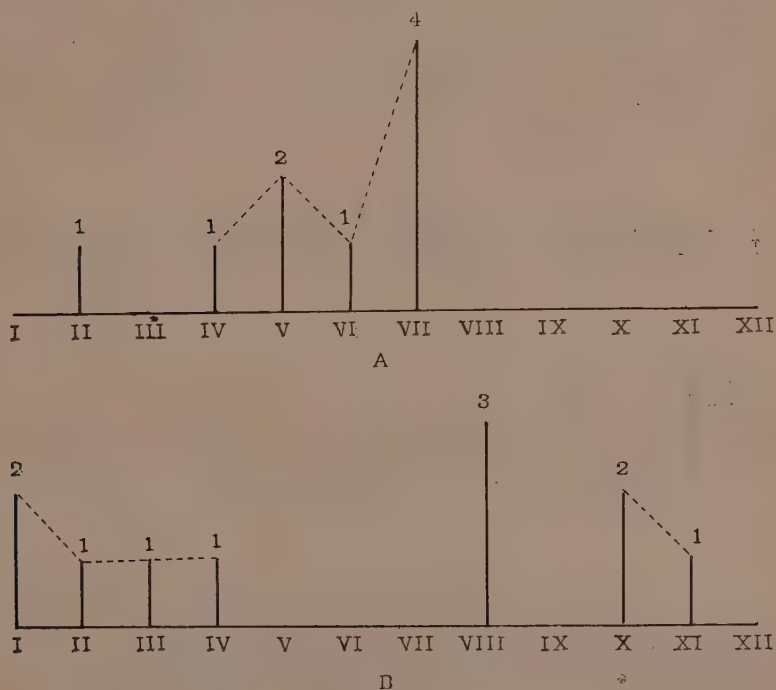


Fig. 2.

cipitazioni atmosferiche e la disposizione dei vulcani ad eruttare; si potrà spiegare il ritardo osservato nel secondo diagramma in due modi:

1) Da un canto supponendo che il regime annuale delle precipitazioni abbia subito un mutamento e questo, a sua volta, abbia influito determinando l'attuale anticipo nell'eruttività di quei vulcani.

(1) Crisi d'eruttività in dipendenza dalle stagioni delle piogge sono evidenti ancora per altre zone vulcaniche, poste sotto regimi di piogge profondamente diversi.

2) In secondo luogo, attribuendo il ritardo del diagramma di Sapper al fatto che le eruzioni registrate dalle cronistorie giapponesi fossero di natura tale da risentire con maggiore lentezza (rispetto alle altre) gli effetti delle infiltrazioni idrometeoriche.

Nessun fatto potrebbe citarsi a conforto della prima ipotesi; poichè quel regime pluviometrico dipende dalle correnti aeree dominanti, dalla situazione geografica del Giappone, dal suo rilievo ecc.; fattori — questi — che non possono aver mutato in così breve volgere di secoli.

La seconda ipotesi è più verosimile; essa è confortata dall'osservazione che anche al Vesuvio l'influenza delle piogge si fa risentire con una certa lentezza e la curva dell'eruttività ripete le fluttuazioni della curva della piovosità con un ritardo di circa tre mesi.

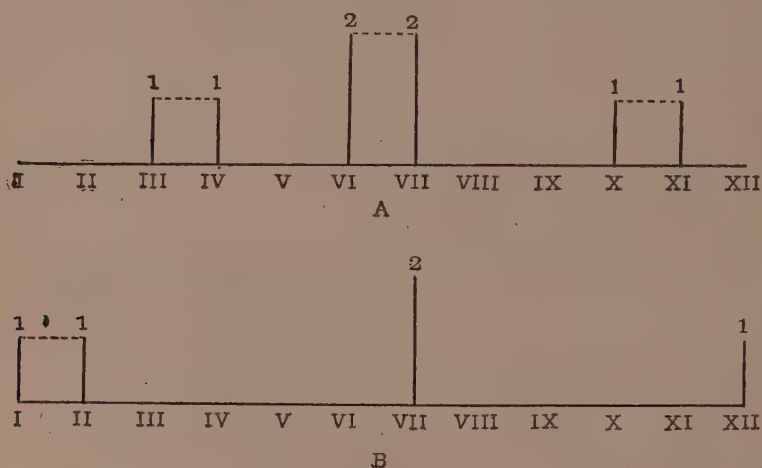


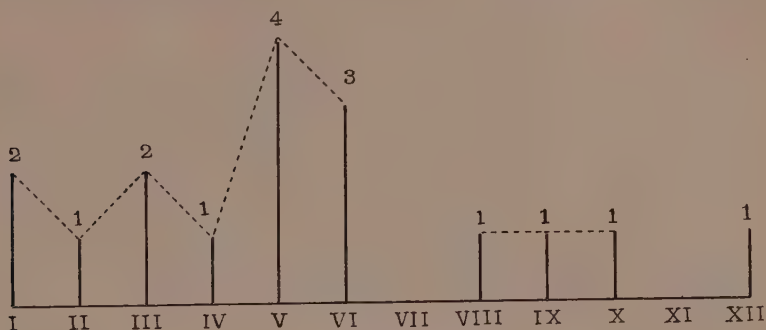
Fig. 3.

Riconoscendo questa diversità di comportamento, però, si verrebbe a distinguere una doppia categoria di eruzioni: quelle più pronte e quelle meno pronte a risentire l'influenza delle precipitazioni atmosferiche.

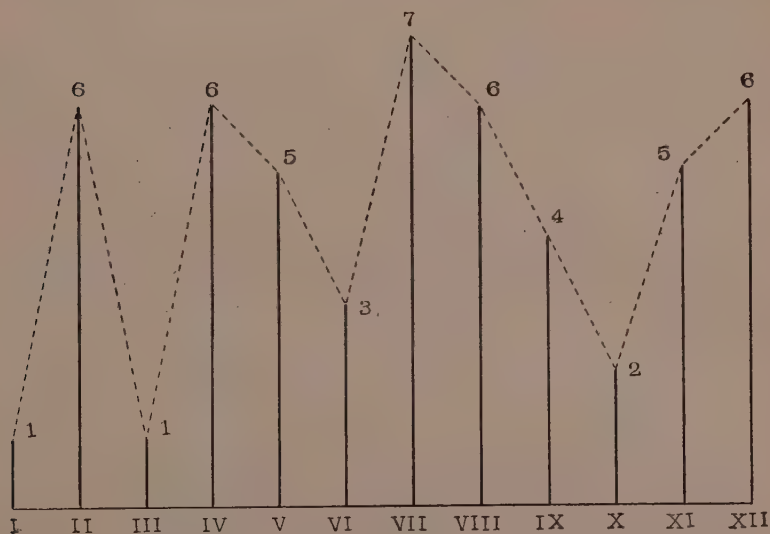
Si osservi, in effetto, che le manifestazioni eruttive registrate da Tanakadate e le eruzioni elencate da Sapper costituiscono già dei materiali non perfettamente comparabili, sia per l'essenza stessa dei fenomeni considerati; sia per il modo come furono registrati; sia, finalmente, per lo scopo al quale le registrazioni stesse venivano destinate. Degli 82 episodi enumerati da Tanakadate (se si eccettuano: la grande eruzione del vulcano di Sakurashima, alcuni parossismi dell'Asama, la fase effusiva del Miharayama, le riprese esplosive dello Yakedake e dell'Asosan) il maggior numero si riferisce ad esplosioni, detonazioni, grandi fumate; in una parola, a fenomeni eruttivi che, pur richiamando l'attenzione dello studioso, non avrebbero

avuto titolo sufficiente per passare alla storia del paese, come le eruzioni elencate da Sapper, quasi tutte memorabili per la loro imponenza.

Fra l'uno e l'altro ordine di fenomeni eruttivi, dunque, non potrà sussistere una piena identità.



A



B

Fig. 4.

Il ritardo della crisi d'eruttività estiva, dimostrato dal diagramma della fig. .1-B, per i 25 vulcani presi nel loro insieme, si rintraccia ancora nel comportamento individuale di alcuni tra quei cinque vulcani per i quali (sulla base delle registrazioni di Tanakadate) erano state tracciate altrove ⁽¹⁾ le linee d'eruttività.

(1) F. STELLA STARRABBA, loc. cit.

La fig. 2-*A* pone in evidenza, per il Tarumai, la distribuzione mensile delle 9 registrazioni di Tanakadate; la fig. 2-*B* si riferisce alle 11 date complete, elencate per lo stesso vulcano da Sapper. Il primo diagramma indica un massimo d'eruttività (4 parossismi) nel mese di luglio; il secondo un massimo (3 parossismi) in agosto, in evidente ritardo d'un mese sul primo.

La fig. 3-*A* mostra la distribuzione delle 8 registrazioni relative allo Yakedake, secondo Tanakadate; la fig. 3-*B* riunisce un piccolo gruppo di date desunte, per lo stesso vulcano, dal catalogo di Sapper. Mentre esso accenna ad una maggiore frequenza in luglio, nel primo diagramma — invece — l'aumento d'attività comincia sin da giugno.

I due diagrammi dell'Asama (fig. 4) indicano un divario più sensibile. Il primo (*A*) mostra il comportamento del vulcano nel decennio 1914-1924 e il periodo di massima attività è il bimestre maggio-giugno.

L'altro diagramma (dalle date storiche di Sapper) dimostra un massimo d'eruttività in luglio, ancora distinto fra diversi massimi secondari d'inverno e primavera.

La fig. 5 (*A* e *B*) comprende i due diagrammi dell'Asosan. I due massimi invernali del secondo (costruito coi dati di Sapper — *B*) sorpassano notevolmente i due massimi estivi di giugno e agosto; questi segnano un ritardo di circa due mesi rispetto al massimo di maggio del primo diagramma (*A*); tuttavia sussiste ancora l'individualità d'un periodo intensamente eruttivo, susseguente alla stagione delle piogge estive. L'attività invernale, che nel primo diagramma si spiega nei tre mesi di novembre, dicembre, gennaio, nel secondo si sposta sul trimestre dicembre, gennaio, febbraio.

Dunque, 4 dei 5 vulcani per i quali è possibile il raffronto individuale dei due tipi di diagrammi ⁽¹⁾, dimostrano costantemente che le fluttuazioni delle linee d'eruttività, tracciate sui dati di Sapper (almeno per quanto riguarda la crisi estiva) riproducono, con ritardo, le fluttuazioni dei diagrammi sulle registrazioni di Tanakadate; questo ritardo varia fra un minimo di uno ed un massimo di tre mesi.

Per il Vesuvio — s'è detto — il ritardo della curva dell'eruttività rispetto a quella delle precipitazioni ammonta a circa tre mesi. Bisogna aggiungere che le date delle eruzioni vesuviane, poste a base del raffronto, hanno — dal punto di vista statistico — lo stesso significato di quelle della serie di Sapper per i vulcani giapponesi.

Infatti nell'uno e nell'altro caso si tratta delle eruzioni ed esplosioni di maggiore violenza che quei vulcani abbiano presentato nel corso dei tempi storici. In conseguenza, si ha da fare con quella categoria di parossismi che lasciano supporre — da parte del vulcani — l'accumularsi di maggiore copia d'energia per vincere maggiori resistenze esterne o (supposta l'acqua

(1) Il Kirishima accenna a due comportamenti antitetici tra di loro.

come agente provocatore d'esplosioni vulcaniche) la penetrazione delle acque filtranti in zone più profonde donde le acque stesse, poi, han potuto spiegare con un maggior vigore la loro funzione esplosiva.

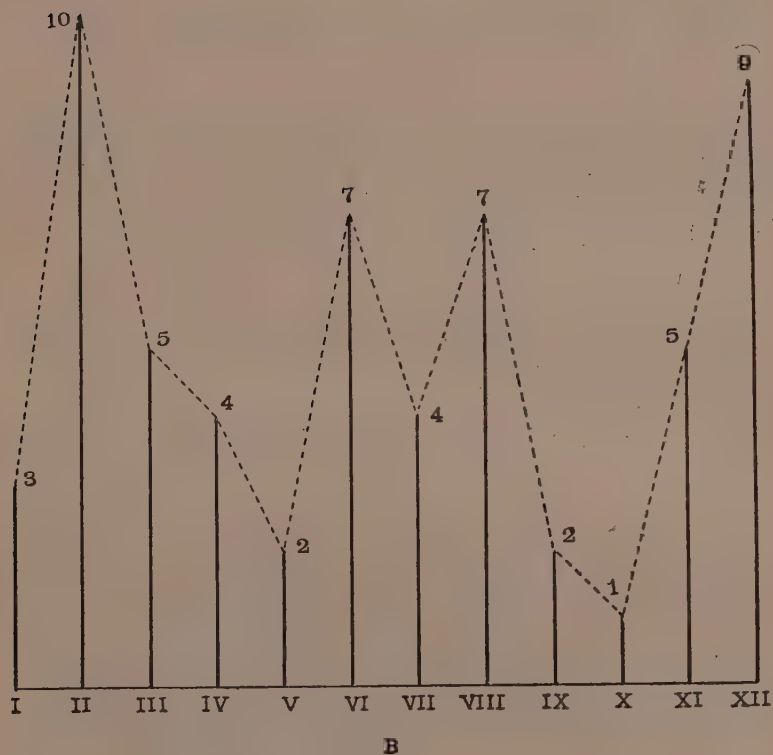
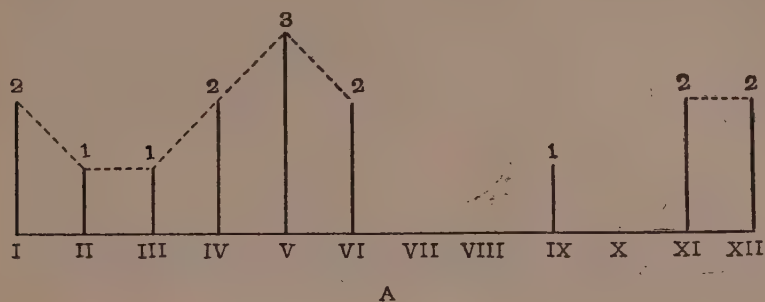


Fig. 5.

In ciascuno di questi due supposti casi, perchè le infiltrazioni idro-meteoriche possano far risentire la loro influenza, è necessario che trascorra un tempo adeguatamente lungo.

Gli episodi esplosivi ai quali si riferisce il maggior numero delle registrazioni di Tanakadate, come conati relativamente superficiali d'attività vulcanica, rientrano nel novero delle manifestazioni che risentono con una maggiore prontezza il variare stagionale della quantità di acque filtranti.

Insieme con la più lenta rispondenza alle infiltrazioni — che le grandi eruzioni sembrano accusare — va forse, parallelamente, il fatto che la linea d'eruttività desunta dai dati di Sapper non ha più la decisione di tratti dell'altra.

Biologia. — *Cordoni oscuri e cordoni chiari nell'organo insulare di « Petromyzon marinus ».* Nota di GIULIO COTRONEI, presentata dal Socio LONGO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *La struttura del corpo di « Peroderma Cylindricum » Heller in relazione alla « Teoria cellulare ».* Nota di B. MONTEROSSO, presentata dal Corrisp. RUSSO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Commemorazione del Socio prof. GAETANO GAGLIO, letta ⁽¹⁾ dal Socio L. SABBATANI.

Chi ha conosciuto il prof. Gaetano Gaglio, ed ha avuto la fortuna di vedere quanta fosse in lui la rettitudine delle azioni, la sincerità dei propositi, la tenacia con cui persisteva nello studio; chi ha potuto apprezzare la fede con cui lavorava, non solo per una soddisfazione del suo spirito aristocratico, ma col fermo intendimento di riuscire utile ai medici; chi ha potuto sentire nella sua conversazione amichevole la delicatezza dei sentimenti suoi, lo spirito altruistico, che spesso lo infiammava, ed ha seguita passo passo la sua vita, intessuta di semplicità e di verità, sente tutta la bellezza della sua figura e la gravità della perdita che abbiamo subita colla sua morte.

(1) Nella seduta dell' 11 aprile 1926.

Quando il 17 febbraio dell'anno scorso dopo breve malattia quasi improvvisamente morì, il rimpianto fu unanime e profondo fra i colleghi, fra i suoi allievi, fra i suoi scolari, fra i suoi amici, fra quanti lo conobbero, lo stimarono e lo amarono. Tutti concordi portarono a lui quel tributo che si meritava, ed ora anche questa Accademia, che l'ebbe Socio Nazionale, vuole resti agli atti suoi un documento, che riassume l'opera scientifica di Gaetano Gaglio e sia tributo alla sua memoria.

Gaetano Gaglio nacque a Girgenti il 5 aprile 1858 da Luigi Gaglio La Mantia, Magistrato, che fu poi per molti anni Presidente della Corte di Assisi di Palermo, e da Vincenzina Nocito, che nella sua famiglia aveva un medico e naturalista insigne, il dottor Gaetano Nocito.

Fece i primi studi a Catania, il ginnasio ed il liceo a Caltanissetta, ma prima ancora di aver terminati gli studi classici si iscrisse come studente di farmacia all'Università di Catania. Così il primo istituto sperimentale che frequentò fu quello di Chimica farmaceutica, e studiando la chimica, fin d'allora fissò precisa l'orientazione della sua mentalità scientifica, l'indirizzo prediletto che seguì poi sempre per tutta la vita nei suoi studi, e sviluppò nella sua scuola.

Terminati gli studi classici, passò alla Facoltà Medica come studente di medicina, ma restò allievo interno nell'Istituto di Chimica farmaceutica, sicchè arrivato al quarto anno (1879-80) fu nominato Assistente nel Gabinetto di Chimica farmaceutica, ed in quest'ufficio fu poi confermato anche l'anno dopo, mentre faceva il quinto anno di medicina.

Arrivato al sesto anno, venne nominato Assistente al Gabinetto di Fisiologia, ma la cattedra in quell'anno era senza titolare, si provvide con un incarico, e lo studente Gaglio, che aveva già una eccellente cultura di chimica e di chimica fisiologica, del tutto insolita per un laureando in medicina, poté cooperare efficacemente all'insegnamento della fisiologia. Terminato l'anno scolastico, il 30 luglio 1882 si laureò in medicina e chirurgia, e subito pensò di abbandonare Catania per seguire un suo sogno di studi chimico-biologici.

Allora in Italia vi era uno grande negli studi, abile, pronto, versatile; suscitatore di fede, di idee, di propositi; fattivo e pronto di opere, che attirava i giovani con simpatia schietta: Angelo Mosso. E Gaglio, ottenuta la laurea, portò al Mosso il suo sogno di studio, e Mosso fece di quel sogno una realtà viva, e lo nominò suo Assistente.

Cominciò allora per Gaglio una vita febbrile di lavoro, di studio e di peregrinazione continua in Italia e all'estero, intesa a conoscere ed imparare i metodi e gli indirizzi che si usavano nelle ricerche biologiche.

L'anno dopo lo troviamo a Bologna nell'Istituto di Patologia generale col prof. Tizzoni, che già era stato suo maestro a Catania; poi lo troviamo a Firenze nell'Istituto di Fisiologia col prof. Luciani. Come premio dei suoi lavori nel giugno del 1884 ottenne la Libera Docenza in Fisiologia.

logia a Catania; ma proprio quando il suo avvenire scientifico pareva ormai assicurato, in un momento di sfiducia e di sconforto, facile nei giovani allorchè hanno teso l'animo ad un massimo sforzo, pensò di abbandonare gli studi. Si presentò ad un concorso per una condotta medico-chirurgica a Buonconvento, presso Siena, ed il 9 ottobre 1884 lo vinse. Stava per accettare, quando i suoi maestri gli furono attorno, e gli diedero la fede che vacillava. Luciani soprattutto, che allora scriveva: « Gagliò è uno di quei giovani distinti per attitudine naturale, per iniziative, per mente lucida ed ordinata, che meritano di essere guadagnati per sempre agli studi scientifici ».

Gli fecero avere una borsa per studi di perfezionamento all'estero in chimica-fisiologica, ed egli, rinunziata la condotta, ricominciò la sua peregrinazione scientifica. Nel 1884-85 lo troviamo a Lipsia con Ludwig; nel 1885-86 a Strasburgo con Schmiedeberg, e là trovò nella farmacologia quello che il suo spirito irrequieto cercava, trovò quell'intreccio di problemi biologici e chimici, che l'avevano appassionato fin da quando, studente di medicina, frequentava i laboratori di chimica; là da Schmiedeberg trovò la sua via.

Tornato in Sicilia, il 1° dicembre 1886 fu incaricato dell'insegnamento di Materia medica a Catania, ma egli era incerto di accettare o no. Forse pensava alla precarietà dell'incarico, alla meschinità dello stipendio, alle esigenze della vita, alla sua famiglia che avrebbe voluto aiutare, ma Angelo Mosso per la seconda volta intervenne in un momento decisivo per la vita di Gagliò, ed il 25 dicembre 1886 gli scriveva di resistere alla seduzione del guadagno immediato colla professione medica: « Resista a questa seduzione (scriveva Mosso) e pensi che siamo in pochi a lavorare per amor di patria ». « Lei deve rimanere con noi e non abbandonarci, perchè abbiamo il diritto di considerarla come una delle nostre reclute migliori, ma che dico? ella si è già guadagnati gli speroni d'oro e ci cammina di fianco nelle prime file ».

Gagliò accettò l'incarico e cominciò la sua vita di insegnante, il suo apostolato di maestro, interrotto solo dalla morte.

La sua vita come insegnante di Farmacologia fu piana, facile e fortunata.

Nel 1886-87 era incaricato di Materia medica a Catania; nel 1887-88 in seguito a concorso, era Straordinario a Sassari, nel 1888 a Bologna; nel 1890 era ordinario a Messina, ed infine nel 1903 era chiamato a Roma come Ordinario alla cattedra di Farmacologia.

Per lui la lezione non era una noia, che distrae dalla ricerca scientifica, ma un piacere, che può godere solo colui che nel lungo esercizio didattico e nella convivenza coi giovani ha acquistata l'anima del Maestro, ed ama gli scolari come figli.

Alla lezione non mancava mai, ed ancora pochi giorni prima di mo-

rire, vincendo l'amorevole resistenza dei suoi Assistenti, volle fare lezione, quantunque fosse già febbricitante, e fu l'ultima.

Alla lezione dedicava una lunga preparazione teorica e sperimentale, e diventava però nella forma facile e piana, nelle esperienze dimostrativa e convincente; nella esposizione logica e stringente, nelle deduzioni pratiche per la terapia sobria ed efficace.

Nelle sue lezioni c'era un continuo studio di coordinazione tra i fattori chimici e biologici dell'esperimento farmacologico, tra questo e l'applicazione terapeutica.

Innovatore con prudenza, tralasciava d'anno in anno quanto appariva inadatto ed invecchiato, raccoglieva del nuovo solo quanto appariva veramente utile. Mirava alla cultura scientifica dei giovani scolari ed ai bisogni pratici loro, quando sarebbero stati medici soli e senza guida. E fu principalmente con questo intento che negli ultimi anni raccolse le sue lezioni in un *Trattato di Farmacologia e Terapia*, bello per la veste tipografica, ben proporzionato per la materia, scelta con cura ed esposta in modo efficacissimo. Il suo scopo fu pienamente raggiunto, del trattato dovette fare tre edizioni e l'anno scorso, quando morì, aveva già pronta per la stampa una quarta edizione.

L'opera di un Maestro, come era Gaglio, non comincia e non termina solo nella scuola, ma in essa si concreta per un più vasto uditorio quello che nel laboratorio è stato in un più ristretta cerchia accuratamente pesato e vagliato, e nello svolgimento completo del corso scolastico si incontrano le lacune, che le ricerche del laboratorio dovranno colmare. Per questo egli dedicò al suo laboratorio altrettanta cura che alla scuola.

Buono, cortese, di modi gentili, disinteressato, era sempre pronto a dare consigli ed aiuto a chiunque studioso si rivolgesse a lui; fin dal primo incontro si attirava la confidenza e la simpatia dei giovani, che volentieri accorrevano a lui e gli restavano poi sempre legati di filiale riconoscenza ed affetto. Per questo ebbe molti allievi, fra cui Sabbatini, Vinci, Buonanni, Baldoni, Nardelli, Di Mattei Pietro, che continuano l'opera scientifica e la scuola del Maestro.

La grande attività scientifica di Gaglio resta documentata dalle numerosissime pubblicazioni che ci ha lasciate, e che unite a quelle dei suoi allievi sommano a più di duecento.

In esse Gaglio ha trattate molte questioni di fisiologia, di chimica-fisiologica, di farmacologia e di terapia.

Tra i lavori di fisiologia devono essere ricordati in modo particolare quelli in cui studiava gli effetti della inanizione sui muscoli, sul fegato e sullo stomaco; quelli sull'innervazione del cuore; sul diabete provocato dall'estirpazione del pancreas; sui canali semicircolari; ed infine quelli recentissimi sulle vitamine.

Fra i lavori di chimica fisiologica dobbiamo ricordare innanzi tutto

quello *Sulla ureogenesi epatica*, che fu il suo primo lavoro, pubblicato nel 1882, nell'anno stesso in cui si laureava. Nell'anno successivo (1883) pubblicava un altro lavoro di chimica-fisiologica: *Sulla formazione dell'acido ossalico nell'organismo*, in cui si resta ammirati vedendo quanta sicurezza di risultati riuscisse ad ottenere con una meravigliosa semplicità di tecnica sperimentale. Questo lavoro, sul quale dovette tornare poi 10 anni dopo per ragioni polemiche, fu il punto di partenza per le sue classiche ricerche sulla inossidabilità dell'acido ossalico nell'organismo animale. Le sue esperienze avevano a loro favore una lunga serie di fatti notissimi ai botanici, ai medici ed anche ai minerologi (minerali formati da ossalati), e trovarono appoggio poi dopo in tutti gli studi circa lo stato chimico in cui l'anione ossalico circola nell'organismo.

Un altro lavoro di Gaglio, molto importante, fu quello *Sulla resistenza che gli animali offrono al curaro*, quando è amministrato loro per via gastrica; in questo caso speciale col curaro poté dimostrare l'azione di difesa che il fegato spiega verso l'intero organismo, che fu poi detta - azione protettiva del fegato.

Nè si devono dimenticare le sue ricerche - *Se l'organismo animale decomponga il ioduro di potassio* - nelle quali, come al solito, con mezzi semplicissimi, ma con critica acuta, esponeva fatti e idee giuste e polemizzava col Binz, quantunque allora (nel 1887) egli fosse semplice incaricato a Catania. In queste ricerche vediamo delinearsi fin d'allora dei concetti sulla ripartizione dei farmaci nell'organismo, che in farmacologia hanno trovato sviluppo solo molti anni dopo.

Quando era a Bologna scoprì l'azione anticoagulante dei sali di metalli pesanti, fatto che allora sembrava paradossale, pensando all'azione emostatica del percloruro di ferro, ed all'azione coagulante che tutti questi sali hanno sulle proteine. Ma le sue osservazioni giustissime, confermate da tutti, sono state occasione ad una lunga serie di lavori e sono state interpretate solo in questi ultimi anni con fatti di chimica colloidale, tenendo conto della concentrazione dei cationi e della serie elettrochimica.

Ma se egli preferiva le ricerche di farmacologia pura, tuttavia non disdegnò mai quelle di farmacologia applicata, di terapia, di farmacognosia e di tecnica farmaceutica.

Così negli anni di guerra, quando in tutti i modi dovevamo cercare di bastare a noi stessi, ed erano venute a mancare molte droghe di importazione estera, Gaglio rivolse la sua attenzione alle piante medicinali che, crescendo nostrane, potevano supplire a quelle mancanti.

Così pure, nell'intento di rendere più efficace la cura della malaria, fece molte ricerche sugli alcaloidi della china, sui preparati di chinina, ed a rinvò ad una formula magistrale per le iniezioni di chinina, che oggi è di uso corrente e porta il suo nome.

Gaglio, che aveva studiato molto ed avea fatti molti viaggi, si era

formata una eccellente cultura classica, archeologica, storica ed artistica; coi suoi lavori di biologia era diventato il farmacologo più stimato d'Italia, Per questo molte volte era stato richiesto di consigli dalla Direzione generale di Sanità, avea ricevuto incarichi speciali dal Ministero dell'Interno per studi sulla malaria, era stato direttore della Scuola di Farmacia, e negli ultimi giorni di sua vita era stato nominato Presidente della Commissione che deve rivedere la Farmacopea e prepararne la quinta edizione.

Pronto a dare sempre di sé tutto ed a chiunque lo richiedesse, non domandò mai nulla; visse solo, modestamente, chiuso nei suoi studi. Era stato fatto Cav. della Corona d'Italia per l'opera prestata durante l'epidemia colerica nel 1887; Cav. Uff. nel 1912; Comm. nel 1923; medaglia di bronzo dei benemeriti della salute pubblica. Era Socio della Società Medico-Chirurgica di Bologna, Socio Ordinario della Reale Accademia Peloritana, Socio Ordinario della Reale Accademia Medica di Roma, Socio Nazionale di questa Reale Accademia.

Ma se gli onori e le ricompense alla sua vita proba ed operosa, spesa tutta per la scuola, per la scienza e per la salute pubblica non furono molte mentre era fra i vivi, a lui in morte resta qui e fuori di qui nel cuore di quanti lo conobbero il ricordo affettuoso e riconoscente; e restano a testimoniare di lui i suoi lavori.

Commemorazione del Socio prof. ARISTIDE STEFANI, letta ⁽¹⁾ dal Corrispondente S. BAGLIONI.

Aristide Stefani nacque il 15 settembre 1846 in S. Giovanni Ilarione (Vicenza), dove suo padre, Ferdinando, era medico condotto. Laureatosi a Padova in medicina nel 1869, vi rimaneva assistente del fisiologo Filippo Lussana fino al 1872, quando, per la morte del padre e per le ristrettezze finanziarie della famiglia, dovè assumere la condotta medica. Ben tosto però, per un' inaspettata fortuna, nell'anno successivo, 1873, fu chiamato alla cattedra di fisiologia dell'Università di Ferrara, che tenne fino al 1899, in cui dopo un breve periodo di incarico fu assunto alla cattedra dello stesso insegnamento nell'Università di Padova, che tenne fino ai limiti consentitigli dall'età, all'anno 1921. Serenamente e cristianamente, come visse, si spese, quasi ottuagenario, la sera del 24 aprile 1925.

Eletto socio corrispondente il 14 luglio 1903, e socio Nazionale il 16 agosto 1906, dopo aver conseguito il Premio Reale per la Fisiologia nel 1903, fu un assiduo collaboratore e, fino all'ultimo anno di sua vita,

(1) Nella seduta dell'11 aprile 1926.

frequentatore nella nostra Accademia; la veneranda persona non mancando mai alle sedute solenni.

E all'Accademia ha legato, per così dire, il cospicuo patrimonio di onesto coscienzioso lavoro scientifico, affidando in quattro Memorie riassuntive e critiche, pubblicate nei voll. XI, XII e XIII (1916, 1919, 1920) degli Atti, i frutti più importanti delle sue ricerche sperimentali della fisiologia del cuore e dei vasi, dei nervi regolatori del ricambio, del cervelletto e labirinto non acustico, della fisiologia generale dei nervi e dei centri nervosi.

Seppe destare vivo interesse ed amore alla ricerca in una numerosa e valente schiera di allievi, che lo ricordavano e ricordano ancora con grande affetto e venerazione, collaboranti con Lui e continuatori della Sua opera, come G. Gallerani, ora fisiologo di Camerino, G. Manca, già fisiologo di Sassari, Alberto ed Emilio Cavazzani, già fisiologo di Ferrara, Aurelio Lui, U. Deganello, G. A. Pari, patologo medico di Padova, B. Vasoin, Berti, A. Rossi, Roncato, F. Soprana.

Il nome di Aristide Stefani è legato ad argomenti dei più difficili e dibattuti di Fisiologia generale, e più specialmente alla questione dell'attività della fase espansoria e di rilasciamento dei muscoli, considerata come proprietà degli organi periferici (miocardio, muscolatura dei vasi sanguigni, muscoli striati), promossa o regolata da speciali nervi e centri; e alla questione dell'attività nervosa che regola i processi metabolici, nota come dottrina dei *nervi trofici*.

Un altro capitolo di Fisiologia speciale di organi e dei centri di senso, al cui recente progresso ha legato indissolubilmente il nome, è quello della funzione dei canali semicircolari e del cervelletto.

Questi argomenti e gli altri di non minore importanza, ai quali egli dedicò con i suoi allievi la sua attività, furono da lui trattati con una serie numerosa di ricerche sperimentali, le quali occuparono quasi l'intera sua vita di assiduo ricercatore, che, conscio della grande complessità e difficoltà di questi problemi, non pensò mai di poter giungere ad una conclusione definitiva, senza tuttavia mai arrestarsi scoraggiato in una rinuncia.

Per ciò che riguarda la questione dell'attività del rilasciamento muscolare, spetta allo Stefani il merito, ampiamente riconosciuto dai fisiologi italiani e stranieri, di aver dimostrato con esperimenti bene ideati e finemente eseguiti che il cuore nella sua fase diastolica è capace di sviluppare una vera e propria azione meccanica aspirante; l'attività diastolica del miocardio, dedotta dal Luciani sulla base di alcune esperienze, che egli stesso riconobbe rudimentali, divenne così un fatto compiuto, che successivamente ha trovato conferma e larga applicazione pratica nei problemi della Fisiopatologia cardiaca. A lui spetta pure il merito di aver fornito evidenti prove sperimentali alla dottrina che considera il nervo vago e i relativi centri come organo regolatore di tale attività diastolica.

Anche la particolare azione di alcuni farmaci che eccitano questa attività del cuore fu dallo Stefani ben chiarita e sperimentalmente dimostrata.

Queste ricerche sul cuore lo condussero a studiare analoghi fenomeni da parte della muscolatura dei vasi sanguigni. Nè si limitò all'analisi singola di questi fatti, ma li integrò in una sintesi coordinativa, cercando di spiegare il loro meccanismo come funzione di un complesso sistema di funzioni protettive e difensive dell'intero organismo.

Non meno importanti sono i risultati delle sue ricerche sul rilasciamento attivo dei muscoli striati, in dipendenza dell'attività centrale.

Notevole e concreto contributo alla conoscenza dell'innervazione che presiede o regola il ricambio materiale, formano le scoperte fatte nella sua scuola di nervi glico-secretori e glico-inibitori.

Allo studio delle funzioni dei canali semicirculari e del cervelletto si sentì attratto, sotto l'influenza del suo maestro Filippo Lussana, fin dall'inizio della sua carriera scientifica e ad esso rimase fedele per più di un trentennio, giungendo coi risultati delle ricerche sue e dei suoi allievi alla dimostrazione sperimentale della dottrina, oggi generalmente riconosciuta dai fisiologi e dai patologi, dell'intima connessione della funzione dei canali semicirculari con quella cerebellare.

A prescindere dall'importanza e significato concreto ed obiettivo che le ricerche dello Stefani coi loro risultati hanno e che assicurano il ricordo perenne del suo nome negli annali e nei trattati delle scienze fisiologiche, un altro carattere, per così dire, quello filosofico, che guidò questo infaticabile e coscienzioso scienziato nell'impostare e nel risolvere i problemi della ricerca, merita essere particolarmente rilevato.

Per questo carattere egli si distinse fin dall'inizio delle sue ricerche fisiologiche dalla numerosa schiera dei fisiologi cosiddetti meccanicisti e materialisti, che specialmente nell'esordio e nel fiorire della sua carriera, erano la maggioranza dei fisiologi e biologi, quasi reazione al predominio della corrente vitalista che aveva dominato nella prima metà dell'800.

Lo Stefani, con grande senso di equilibrio e di temperanza filosofica, riconobbe sempre la grande importanza che si deve attribuire alle ricerche e ai metodi sempre più fini ed acuti dell'indagine fisico-chimica, ai cui frutti sono certamente da attribuire i più brillanti progressi dell' moderne scienze biologiche; ma non perdè mai di vista, anzi con predilezione mise in evidenza il carattere peculiare dei fenomeni vitali, del cosiddetto teleologismo, a cui oggi si torna a dare sempre maggiore importanza nelle moderne concezioni neo-vitalistiche.

Lo Stefani ebbe il merito di aver sempre difeso quel sano vitalismo dei grandi fisiologi e biologi del secolo scorso, senza tuttavia mai misconoscere l'importanza e il significato pratico dei metodi e dei concetti fisico-chimici.

In un discorso inaugurale tenuto nell'anno scolastico 1906-1907 *Sul concetto della vita*, egli chiaramente manifestò il concetto fondamentale che lo guidò e lo rese.

« La fisiologia, Egli disse, è ben lontana dal poter dimostrare quali siano i processi fisici e chimici per cui si compiono quei fenomeni materiali degli esseri organizzati, che si dicono vitali; ma io non trovo motivo per escludere la possibilità di simili conoscenze e non ho difficoltà ad ammettere che un giorno si potranno forse fabbricare dei corpi contrattili e secernenti come i muscoli e le ghiandole. Ciò che trascende la nostra intelligenza non sono i fatti anatomici e fisiologici, isolatamente considerati; ma dall'un canto la loro coordinazione nell'interesse dell'organismo e della specie, e dall'altro la sensazione. Ciò che rende impenetrabile il mistero della vita sono la *coordinazione* e la *psiche*.

« La contemplazione dell'ordine con cui si succedono le cose, ha dato origine ai sentimenti di ammirazione e di finalità, da cui derivano le opere più sublimi dell'arte, della poesia, della legislazione...

« Per la scienza la finalità non è, e non potrà essere, che un sentimento, e per ciò non può essere che una illusione il credere di spiegare scientificamente un fatto riferendolo ad una causa finale; ma della compatibilità del sentimento di finalità colla scienza mi pare che non vi possa essere dubbio, quando si considera che esso fu ed è apertamente professato da persone che toccarono le più alte cime del sapere; e ad ogni modo, prima di reclamarne il bando la scienza dovrebbe almeno dimostrare, sia pure in via puramente dottrinale, come da una massa omogenea in tutte le sue più minute particelle, fra le quali non esistono differenze nè di spazio nè di tempo, perchè infinito il primo ed eterno il secondo, sia possibile la formazione di corpi con differenze determinate...

« Ma se la finalità non può essere che un sentimento, una fede, l'ordine delle cose è un fatto, del quale, come di ogni altro fatto è compito della scienza cercarne la causa. E se il fisico può trascurare questa ricerca... il fisiologo non può fare altrettanto. E ciò non solo per la ragione che non si può studiare una macchina senza tener conto del suo ufficio, ma perchè le proprietà degli organismi sono un prodotto degli organismi stessi, e le coordinazioni biologiche derivano quindi da una attività insita nell'organismo, che preesiste alla forma definitiva di esso, attività operosa dal principio alla fine della vita e la cui operosità non può venir meno senza pericolo di morte. E difatto, queste coordinazioni non si palesano semplicemente nella corrispondenza mirabile fra l'organo e la funzione, ma nella formazione dell'organismo, nell'adattamento continuo di esso alle condizioni interne ed esterne, e nella riparazione anche dei suoi guasti eventuali; per cui, volendo paragonare l'organismo ad una macchina, bisognerebbe paragonarlo ad una macchina che si fabbrica da sè, che si conserva, che si riproduce, e che ripara anche le sue eventuali rotture...

« È un grossolano errore il considerare l'adattamento degli esseri organizzati, nel quale lo Spencer ha riconosciuto la caratteristica principale della vita, come un fatto passivo, come il mutamento nella forma di un corpo elastico, prodotto da un mutamento di pressione. L'adattamento biologico è invece una reazione dell'organismo, per mezzo della quale questo cerca e riesce a conservare la sua individualità, ad onta dei mutamenti dell'ambiente interno ed esterno, e costituisce perciò un fatto eminentemente attivo... e che rientra nei fatti di *irritabilità*, che è quella proprietà caratteristica degli esseri organizzati, per cui i fenomeni fisiologici riconoscono la loro causa effettiva negli organismi stessi, e nell'ambiente non riconoscono che delle condizioni o delle occasioni...

« Secondo il Pflüger, le condizioni fisiche e chimiche, inerenti ad un bisogno fisiologico, costituiscono uno stimolo il quale provoca quelle azioni per mezzo delle quali il bisogno viene poi soddisfatto. Secondo questa legge si compiono, a mio avviso, gli adattamenti all'ambiente interno ed esterno, e quindi tutte le coordinazioni fisiologiche, ad eccezione di quelle che dipendono da automatismo. Ma di meccanico questa legge non ha che il nome con cui fu battezzata; perchè il bisogno non ha e non potrà avere che un significato teleologico. L'importanza della legge di Pflüger non consiste quindi nella possibilità di spiegare con essa meccanicamente le coordinazioni fisiologiche, ma nel fatto che essa riconosce in queste coordinazioni altrettanti fenomeni di irritabilità...

Ma « il fenomeno più importante (continua Stefani), promosso dalla irritazione fisiologica, è, senza dubbio, la *sensazione*; e siccome la sensazione è notoriamente quel fattore che determina la scelta e che coordina in rapporto ad essa gli atti dell'uomo, e siccome fatti di coordinazione che da principio si possono compiere solamente sotto la direzione della sensazione, in seguito si compiono anche senza il concorso della coscienza; così a me pare che non sia fuor di luogo il pensare, che nei processi per cui si compiono le coordinazioni fisiologiche intervengano, o siano intervenute, delle azioni psichiche, di natura elementare, per cui la coordinazione fisiologica venga ad essere sempre il prodotto di azioni psichiche, presenti o passate, rappresentate cioè da una speciale organizzazione operatasi per azione psichica.

« Attività coordinatrice, vita e psiche sono, a mio avviso, cose fra di loro intimamente legate, o meglio forse, non sono che aspetti diversi di una stessa cosa...

« Ma se la psiche dirige i processi fisiologici, non ne viene per questo che essa si sottragga alla legge della causalità. La psiche è un fatto naturale come il movimento; solo, a differenza del movimento, essa trascende la nostra intelligenza. E non potendo pretendere di conoscere le leggi, secondo le quali si svolgono i fenomeni psichici, pur riconoscendo che queste leggi devono esistere, regolatrice suprema delle istituzioni sociali deve es-

sere l'esperienza, per la stessa ragione che solo dal prodotto si può giudicare se convenga una determinata coltura...

« Ma se la psiche è un'incognita, sarà per lo meno inutile invocare l'intervento di essa nei processi fisiologici, perchè con le incognite le incognite non si spiegano. Anch'io seguendo la corrente, ho condiviso parecchio tempo simile concetto, ma poi ho compreso, che, sotto la parvenza del rigore scientifico, esso celava un equivoco...

« E precisando meglio il mio concetto dirò, che, a mio avviso, il biologo deve studiare i fatti di sua competenza non solo dal punto di vista fisico-chimico, ma anche, e principalmente, come stimoli e come prodotti di energie specifiche che agiscono e reagiscono nell'interesse dell'individuo e della specie. Solamente in questo modo si farà della fisiologia; in caso diverso si farà solamente della fisica e della chimica. E dell'opportunità di un simile indirizzo... mi persuade il fatto, che le leggi fondamentali della biologia, come le leggi dell'eredità, dell'adattamento, delle energie specifiche, della divisione e della integrazione del lavoro biologico, non hanno alcun carattere nè fisico, nè chimico ».

La scrupolosa onestà dell'illustre ricercatore non gli permetteva però di chiudere il suo discorso senza una notevole limitazione. « Com'era mio dovere, Egli concludeva, vi ho esposto schiettamente il mio pensiero intorno alla vita; ma io mancherei ad un altro dovere, se dopo di ciò non vi mettessi in guardia dal prendere il mio pensiero per verità dimostrata.

« Solo i fatti costituiscono l'edifizio scientifico: le ipotesi, le dottrine non servono che a promuovere e a dirigerne lo sviluppo; e primo nostro dovere è quindi quello di tenere sempre bene distinti i fatti dalle teorie.

« Chi si dedica alla scienza, non può e non deve essere un apostolo; facendosi tale egli perde il suo carattere. I fatti dimostrati non hanno bisogno di propaganda, e rispetto alle dottrine, anche le più accreditate, è sempre doveroso il dubbio. Nessuna conclusione può essere dallo studio formulata, senza la implicita riserva di attendere il responso della esperienza, con animo sereno, con spirito di verità.

« La scienza deve essere modesta e tollerante, perchè quanto è dimostrato è troppo poco rispetto a quello che resta a dimostrare; perchè la prima condizione per bene coltivare la scienza è di essere immuni dalla pretesa di possedere la verità.

« L'uomo di studio deve sentirsi pago di essere un eletto alla ricerca del vero; convinto che la sua missione sarà stata pienamente compiuta se la verità stessa gli potrà scrivere sulla tomba:

« Quarens me sedisti lassus ».

Non ho creduto di poter meglio chiudere questo rapido, incompleto ricordo di Aristide Stefani senza ripetere e proclamare questi profondi con-

cetti che, se definiscono l'opera dello scienziato da lui idealmente vagheggiato, ben si adattano a scolpire i tratti più vivi della sua nobile figura di Fisiologo italiano.

PUBBLICAZIONI DI A. STEFANI

1. *I cristalli di Teichmann nel riconoscimento delle macchie di sangue*. «Gazz. Med. Ital. Province Venete». Anno XIV, n. 8, Padova, Stab. Prosperini, 1871.
2. *Prelezione al corso di fisiologia sperimentale nell'Università libera di Ferrara*, 20 gennaio 1873. Ferrara, Tip. dell'Eridano, 1873.
3. *Il movimento molecolare negli organismi animali*. Memoria per il concorso alla Cattedra di Fisiologia nella libera Università di Ferrara. Ferrara, Stab. Tip. Taddei e Figli, 1873.
4. *Rapporti fra l'economia degli esseri organizzati e l'economia sociale*. Discorso letto nella solenne riapertura dell'Università di Ferrara il giorno 2 novembre 1874. Ferrara, Stab. Tip. Taddei e Figli, 1874.
5. *Ricerche sperimentali sulla fisiologia dei canali semicircolari*. Memoria letta all'Accademia Medico-Chirurgica di Ferrara il 24 maggio 1874.
6. *Influenza della respirazione sulla pressione del sangue*. Comunicazione fatta al XII Congresso degli Scienziati in Palermo. Classe Medico-Chirurgica. Anatomia e Fisiologia, 1875.
7. *Sull'eccitazione del nervo vago*. «Lo Sperimentale». Anno XXX, 1876.
8. *Studi sulla funzione dei canali semicircolari e relazione di esperimenti fatti per ricercare i rapporti funzionali dei medesimi col cervelletto*. Lettura fatta all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara il 6 luglio 1876 e comunicata quindi al Congresso Medico di Torino nel settembre 1876.
9. *Contribuzione alla fisiologia del cervelletto*. Memoria comunicata all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara il 24 novembre 1877.
10. *Nuovo metodo per studiare sperimentalmente le variazioni del volume del cuore e gli effetti di un aumento di pressione nella cavità del pericardio*. Comunicazione preventiva all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara, fatta il 24 novembre 1877.
11. *Ricerche anatomiche intorno al cervelletto di colombi sani ed operati nei canali semicircolari*. In collaborazione con G. WEISS. Memoria letta all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara il 24 novembre 1877.
12. *Intorno alle variazioni del volume del cuore ed alla aspirazione diastolica*. Memoria letta all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara il 6 luglio 1878.
13. *Intorno alle variazioni del volume del cuore ed alla aspirazione diastolica*. «Arch. per le Scienze Mediche», vol. III, n. 7.
14. *Del teologismo in rapporto specialmente con la fisiologia*. Discorso inaugurale letto il 16 novembre 1879. Ferrara, Stab. Tip. Taddei e Figli, 1879.
15. *Ulteriore contribuzione alla fisiologia del cervelletto e canali semicircolari*. Memoria letta all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara il 21 giugno 1879.
16. *Ulteriore contribuzione alla fisiologia del cervelletto e dei canali semicircolari*. Memoria letta all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara il 21 giugno 1879. «Arch. per le Scienze Mediche», vol. IV, n. 8.
17. *Contribuzione alla fisiologia degli emisferi cerebrali*. «La Rivista Clinica», 1880.
18. *Ipertrofia del cervelletto in un Colombo a cui un anno prima erano stati levati gli emisferi cerebrali*. Memoria letta all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara, giugno 1881.

19. *Intorno al modo con cui il vago agisce sul cuore.* Memoria letta all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara il 1° dicembre 1882.
20. *Capitale fisiologico e capitale economico. Alcune considerazioni sugli effetti della ricchezza.* Discorso inaugurale. Ferrara, 12 novembre 1882. Stab. Tipolitogr. Taddei e Figli.
21. *Un caso di corpo straniero ecc.* «Rivista Clinica», 1884.
22. *L'incrocciamento dei nervi utilizzato per lo studio delle funzioni dei centri nervosi.* Memoria letta all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara il 31 marzo 1885.
23. *L'incrocciamento dei nervi utilizzato per lo studio delle funzioni dei centri nervosi.* Seconda comunicazione letta all'Acc. di Ferrara, 1886.
24. *Die Vertheilung von Nerven benutzt zum Studium für die Functionen der Nerven-centren.* «Archiv. für Anatomie und Physiologie (Physiologische Abtheilung)», 1886.
25. *Contribuzione all'istogenesi della corteccia cerebellare, in collaborazione con Bellouci.* Memoria letta all'Acc. di Ferrara il 5 luglio 1886.
26. *Della influenza del sistema nervoso sulla circolazione collaterale.* Comunicazione letta all'Acc. di Ferrara il 7 luglio 1887.
27. *Se possono unirsi fra loro le superfici centrali di sezione delle fibre nervose.* Nota preventiva letta all'Acc. di Ferrara il 7 luglio 1887.
28. *Intorno alle oscillazioni del tono delle orecchiette osservate dal prof. Fano.* «Gazz. degli Osp.», 8 gennaio 1887.
29. *Risposta al prof. Fano.* «Gazz. degli Osp.» 8 gennaio 1887.
30. *In qual modo il vago polmonare modifica il ritmo del respiro quando aumenta e quando diminuisce la pressione nella cavità dei polmoni.* In collaborazione con C. SIGHICELLI. «Lo Sperimentale», luglio 1888.
31. *Quale azione spieghi l'anemia sulle fibre nervose.* In collaborazione con E. CAVAZZANI. Memoria letta all'Acc. Medico-Chirurgica di Ferrara il 4 giugno 1888.
32. *Contribuzione alla fisiologia delle fibre commessurali.* Comunicazione fatta al Congresso di Basilea, 12 settembre 1889. «Arch. per le Scienze Mediche», vol. XIV, 1889.
33. *Contribuzione farmacologica alla dottrina dell'attività della diastole.* In collaborazione con C. GALLERANI. «Arch. Scienze Mediche», vol. XIV, n. 9, 1889.
34. *Cardiovolume, pressione pericardica e attività della diastole.* Memoria letta all'Accademia Medico-Chirurgica di Ferrara, 5 agosto 1891.
35. *Intorno alle localizzazioni cerebrali.* «Rif. Med.», marzo 1892.
36. *Intorno ai centri visivi dei colombi ed alle fibre commessurali.* In collaborazione con G. GALLERANI. «Arch. per le Scienze Mediche», vol. XVI, n. 11.
37. *Chilemia in un cane.* «Atti del R. Ist. Veneto di S. L. A.», t. IV, Ser. VII, 1892-93.
38. *Come si modifica la capacità dei diversi territori vascolari col modificarsi della pressione.* «Atti R. Ist. Veneto di S. L. A.», t. IV, Ser. VII, 1892-93.
39. *Ricerche sul liquido cerebro-spinale.* «Atti R. Ist. Veneto di S. L. A.», t. IV, Ser. VII, 1893.
40. *Del fenomeno della vita.* Discorso all'Acc. Olimpica. Vicenza Tip. Paroni 1894.
41. *L'azione locale vaso-dilatatrice dell'urea cresce col crescere della pressione.* «Atti R. Ist. Veneto di S. L. A.», t. V, Ser. VII, 1893-94.
42. *Mutamenti fisici e mutamenti fisiologici del lume dei vasi.* «Riforma Med.», 1894.
43. *Del potere regolatore degli organismi.* Conferenza tenuta all'Acc. Olimpica di Vicenza il 30 marzo 1895. Vicenza, Tip. Fratelli Giuliani.

44. *Intorno all'azione protettiva dei vasi sul cuore.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », t. VI, Ser. VII, 1894-95.
45. *Dell'azione della temperatura sui centri bulbari del cuore e dei vasi.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », t. VI, Ser. VII, 1894-95.
46. *Se il moncone di un nervo si possa unire col moncone periferico di un nervo più lungo, e se avvenuta l'unione questa conservi le sue proprietà fisiologiche in tutta la sua lunghezza.* In collaborazione con E. CAVAZZANI. « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », t. VI, Ser. VII, 1894-95.
47. *Dell'azione vaso-motoria riflessa della temperatura.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », t. VI, Ser. VII, 1894-95.
48. *Azione della pressione arteriosa sui vasi e sul cuore.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », t. VII, Ser. VII, 1895-96.
49. *Della proprietà delle fibre nervose di mantenere isolati i loro monconi centrali.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », t. VIII, Ser. VII, 1896-97.
50. *In commemorazione del prof. Filippo Lussana.* « Atti del R. Ist. Veneto di S. L. A. », t. IX, Ser. VII, 1897-98.
51. *Aplasia congenita del cervelletto in un cane.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », t. IX, Ser. VII, 1897-98.
52. *Sulla genesi del circolo collaterale.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », t. IX, Ser. VII, 1897-98.
53. *Della irritabilità.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », t. LVIII, p. II, 1898-99.
54. *In omaggio a Lazzaro Spallanzani nel centenario della sua morte.* « Atti dell'Accademia di S. L. A. », Padova, Tip. G. B. Randi, 1899, disp. III, vol. XV.
55. *Commemorazione del prof. F. Lussana, letta nell'Aula M. della R. Università di Padova, 1900.* Padova, Tip. G. B. Randi, 1900.
56. *Azione locale sui vasi muscolo-cutanei del sangue dispoico e del sangue carbossidato.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », 1900-901, t. LX, p. II.
57. *Della proprietà delle fibre nervose di mantenere isolati i loro monconi centrali.* « Gazz. degli Osp. e delle Clin. », n. 6, 1901.
58. *Azione locale della stricnina sui vasi sanguigni.* In collaborazione con B. VASOIN. « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », 1901, t. LXI, p. II.
59. *Della funzione non acustica di orientamento del labirinto dell'orecchio.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », 1902-03, t. LXII, p. II.
60. *Della funzione non acustica e di orientamento del labirinto dell'orecchio. Movimento di torsione del capo e rapporti del labirinto non acustico con i centri nervosi encefalici.* « Atti R. Ist. Veneto di S. L. A. », 1902-03, t. LXII, p. II.
61. *Mutamenti fisici e mutamenti fisiologici del lume dei vasi.* « Atti del XI Congresso Medico Internaz. », Roma, 1904, vol. II, p. 86-104.
62. *Sul concetto della vita.* Discorso inaugurale letto nella R. Università di Padova il 5 novembre 1906. Padova, Tip. G. B. Randi, 1906.
63. *Azione del vago sugli scambi e sulla temperatura interna.* « Arch. di Fisiologia », vol. V, 1908.
64. *Sulla divisione del lavoro fisiologico.* Discorso letto nell'adunanza solenne del 28 maggio 1911, del R. Istituto Veneto.
65. *Sul consumo degli organi nel digiuno.* Congresso Internazionale di Fisiologia, Vienna, 1910.

66. *Azione regolatrice del vago sugli scambi*. Congresso Internazionale di Fisiologia, Vienna, 1910.

67. *Relazione sull'opera della Commissione Pellagologica*, Padova, 1910-11. Tip. Penada, Padova, 1911.

68. *Attitudine di uno stesso stimolo di agire contemporaneamente sui centri nervosi e sugli organi da questo innervati producendo fenomeni di carattere opposto*. «Atti R. Ist. Veneto di S. L. A.», t. LXXIV, p. II, 1915.

69. *Sull'azione trofica del sistema nervoso*. «Le Nevraxe», vol. XIV, 1913.

70. *Contributi alla fisiologia del cuore e dei vasi*. «Mem. R. Acc. Lincei», Ser. V, vol. XI, 1916.

71. *Nervi regolatori del ricambio*. «Mem. R. Acc. Lincei», Ser. V, vol. XII, 1917.

72. *Rapporto funzionale fra cervelletto e labirinto non acustico*. «Mem. R. Acc. Lincei», Ser. V, vol. XII, 1920.

73. *Contributi alla Fisiologia generale dei nervi e dei centri nervosi*. «Mem. R. Acc. Lincei», Ser. V, vol. XII, 1921.

74. *Manuale di Fisiologia*. In collaborazione con P. ALBERTONI. Milano, Vallardi.

NECROLOGI

A. RONCATO, «Riv. di Biol.», vol. VII, fasc. 3, 1925, p. 372.

U. DEGANELLO, «Il Valsalva», Anno I, fasc. 12, dicembre 1925, p. 497.

V. DUCCESCHI, «Arch. di Fisiologia», vol. 23, fasc. 3, 1925, p. 299.

Il PRESIDENTE ricorda la grave perdita che ha colpito l'Accademia nella persona di un illustre suo Socio straniero il prof. KAMERLINGH ONNES HEIKE, della Università di Leida. Dell'estinto Socio il Presidente fa una breve commemorazione, ricordandone la brillante carriera scientifica, le numerose ed importanti memorie, in gran parte riguardanti le teorie del calore e della termodinamica, e le celebri ricerche compiute nel Laboratorio criogeno di Leida, dove ottenne per la prima volta la liquefazione e poscia la solidificazione dell'Elio, e dimostrò che a bassissime temperature i metalli non presentano apprezzabile resistenza al passaggio della elettricità.

COMUNICAZIONI

Il Presidente VOLTERRA comunica alla Classe il telegramma inviato a S. E. il Presidente del Consiglio, col quale, interpretando i sentimenti dei Soci, ha deplorato il criminoso attentato ed ha espresso le felicitazioni dell'Accademia per lo scampato pericolo.

Il PRESIDENTE segnala alla Classe la costituzione di un importante centro di studi e di cultura in Ancona, col nome di Istituto Marchigiano di scienze, lettere ed arti, ed annunzia la pubblicazione di un primo volume di Atti; a questo Istituto, che colma una lacuna che esisteva nelle Marche, il sen. VOLTERRA, a nome dell'Accademia dei Lincei, manda i migliori auguri.

Il PRESIDENTE annuncia che assiste alla seduta il prof. ALFREDO ROSENBLATT, della Università di Cracovia, e ad esso porge il saluto degli Accademici presenti.

MEMORIE DA SOTTOPORRE AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Il Socio PARRAVANO presenta, perchè venga sottoposta all'esame di una Commissione, la memoria di E. OLIVIERI-MANDALÀ intitolata: « Sintesi con l'acido azotidrico ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

È approvata la inserzione negli Atti Accademici delle memorie seguenti, salvo le consuete riserve:

PIAZZA MARIA, « Studio cristallografico di alcuni cristalli di Euclase del Brasile » (ZAMBONINI, rel., e MILLOSEVICH).

ALOISI P., « Osservazioni sui pirosseni di Campiglia Marittima (Toscana) » (MILLOSEVICH, rel., e D'ACHIARDI).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CASTELNUOVO presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste una numerosa raccolta di lavori a stampa del Socio Corrisp. F. SACCO; ed un'opera postuma del compianto Socio sen. GRASSI, avente per titolo: « L'interpretazione di GIGLIO Tos dei fenomeni fondamentali della vita ».

Il Pres. VOLTERRA offre, a nome dell'autore, ing. MAZZONE-SANGIORGI, la pubblicazione: « Saggio di una nuova teor'ia generale per il moto delle acque e degli altri fluidi » e ne discorre; segnala inoltre la importante pubblicazione: « Mémorial des sciences mathématiques » contenente tante interessanti monografie, fra cui l'ultima del BOULIGAUD « Sulle funzioni armoniche e i principii di Picard e di Dirichlet ».

Il Socio SEVERI fa omaggio della 2^a edizione del suo « Trattato di geometria proiettiva ».

G. C.
